Analysis III

In der Analysis III geht es um die Integration von reellen Funktionen. Dabei wollen wir auch Funktion in mehreren Variablen integrieren können. Der Ansatz aus der Analysis I über Regelfunktionen hat dabei verschiedene Nachteile. Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$ ist keine Regelfunktion und für uns bisher nicht integrierbar.

Man möchte gerne ein Integral mit folgenden Eigenschaften. Schreibe für $A \subseteq \mathbb{R}$ $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (charakteristische Funktion von A). Es soll gelten

- $\int \chi_{[0,1]}\, dx = 1$ (Normiertheit)

- $\int \chi_A\, dx = \int \chi_B\, dx$ wenn $B = \{a + r \mid a \in A\}$ für ein festes $r \in \mathbb{R}$ (Translationsinvarianz)

- $\int \chi_A\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int \chi_{A_n}\, dx$ wenn $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$. (Additivität)

Ein Satz von Vitali sagt: das geht nicht, wenn man alle Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}$ zuläßt.
Man muss sich einschränken auf gewisse Systeme von Teilmengen von $\mathbb{R}$, die zum Beispiel alle offenen und abg. Intervalle enthalten. Solche Mengen heißen messbare Mengen.

Wir beschäftigen uns zuerst mit messbaren Mengen und dann mit der Integration

Literatur

Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie (ULB)

* Bauer, Maß- und Integrationstheorie (ULB)

Lang, Real analysis

Hewitt-Stromberg, Real and abstract analysis.

* Rudin, Real and complex analysis