§4 Nullmengen und Konvergenzsätze

1. <u>Def</u> Sei $(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ ein Maßraum. Erinnerung an §2.16: eine Menge $N \in \mathcal{A}$ heißt <u>Nullmenge</u> (genauer: <u>μ-Nullmenge</u>), wenn $\mu(N) = 0$.
Eine Eigenschaft gilt <u>μ-fast überall</u> auf Ω, falls die Menge aller $p \in \Omega$, für die sie <u>nicht</u> gilt, in einer Nullmenge enthalten ist.

2. <u>Bemerkg.</u> Seien $g, f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar. Dann sind die Mengen

$$\{p \in \Omega \mid f(p) < g(p)\}$$
$$\{p \in \Omega \mid f(p) = g(p)\}$$
$$\{p \in \Omega \mid f(p) \leq g(p)\}$$
$$\{p \in \Omega \mid f(p) \neq g(p)\}$$

messbar.

<u>Denn</u> $\{p \in \Omega \mid f(p) < g(p)\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{p \in \Omega \mid f(p) < q \text{ und } g(p) > q\}$

ist messbar, also auch ihr Komplement $\{p \in \Omega \mid f(p) \geq g(p)\}$ und damit auch $\{p \in \Omega \mid f(p) = g(p)\}$ sowie $\{p \in \Omega \mid f(p) \neq g(p)\}$. $\square$

3. Lemma Sei $(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ ein Maßraum, sei $f: \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar, mit $f \geq 0$. Dann sind äquivalent: (i) $\int_\Omega f \, d\mu = 0$

(ii) $f = 0$ μ-fast überall.

Beweis Sei $N = \{p \in \Omega \mid f(p) \neq 0\} \in \mathcal{A}$.

(i) ⇒ (ii): Setze $A_k = \{p \in \Omega \mid f(p) \geq \frac{1}{k+1}\}$

$\Rightarrow N = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, $\frac{1}{k+1} \cdot \chi_{A_k} \leq f$, also

$\int_\Omega \frac{1}{k+1} \chi_{A_k} \, d\mu = \frac{1}{k+1} \mu(A_k) \leq \int_\Omega f \, d\mu = 0$ für alle k

$\Rightarrow \mu(N) = \lim_k \mu(A_k) = 0$

(ii) ⇒ (i): Es gilt $f \leq \infty \cdot \chi_N$, also

$$0 \leq \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega \infty \cdot \chi_N \, d\mu = \lim_k \int_\Omega k \cdot \chi_N \, d\mu$$

$$= \lim_k k \cdot \mu(N) = 0$$

□

4. <u>Korollar</u> Sei (A, Ω, μ) ein Maßraum, seien $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar mit $f = g$ μ-fast überall. Dann gilt:

(i) falls $f, g \geq 0$, so ist $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu$.

(ii) f ist genau dann integrierbar, wenn g integrierbar ist. Dann gilt $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu$.

<u>Beweis</u> Sei $N = \{ p \in \Omega \mid f(p) \neq g(p) \} \in A$, N ist Nullmenge.

Zu (i): $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega (f \cdot \chi_N + f \cdot \chi_{N^c}) \, d\mu$

$$\overset{§4.3}{=} \int_\Omega f \cdot \chi_{N^c} \, d\mu = \int_\Omega g \cdot \chi_{N^c} \, d\mu$$

$$\overset{§4.3}{=} \int_\Omega (g \cdot \chi_N + g \cdot \chi_{N^c}) \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu. \qquad \square$$

Zu (ii): Es folgt zunächst
$f_+ = g_+$ μ-fast überall
$f_- = g_-$ μ-fast überall

damit nach (i) $\int_\Omega f_+ \, d\mu = \int_\Omega g_+ \, d\mu$ sowie

$$\int_\Omega (-f_-) \, d\mu = \int_\Omega (-g_-) \, d\mu$$

und damit folgt (ii). $\square$

5. Korollar Sei $(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ ein Maßraum,
sei $f: \Omega \to [-\infty, \infty]$ integrierbar.
Dann gilt $|f| \neq \infty$ fast überall. Insbesondere gibt es $\tilde{f}: \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar, mit $f = \tilde{f}$ μ-fast überall.

Beweis Sei $N = \{p \in \Omega \mid |f(p)| = \infty\} \in \mathcal{A}$.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \cdot \chi_N \leq |f|$, also
$n \cdot \mu(N) = \int_\Omega n \cdot \chi_N \, d\mu \leq \int_\Omega |f| \, d\mu < \infty$, damit
$\mu(N) = 0$. Also ist $|f| \neq \infty$ μ-fast überall.
Setze nun $\tilde{f} = f \cdot \chi_{N^c}$, $\tilde{f}(p) = \begin{cases} f(p) & \text{falls } |f(p)| \neq \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\square$

Erinnerung an §2.16. Die Vervollständigung des Maßraums $(\underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}_{\text{Borelmengen}}, \mathbb{R}^n, \lambda)$ λ Lebesgue-Maß
ist $(\underbrace{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}_{\text{Lebesgue-Mengen}}, \mathbb{R}^n, \lambda)$, mit
$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow$ es gibt $B, N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
N Nullmenge, $M \subseteq N$, $A = B \cup M$, $\lambda(A) = \lambda(B)$.

6. <u>Lemma</u> Sei $\mathbb{B} \subseteq [-m,m]^n$ Borelmeßbar, sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $U \supseteq B$ und $\lambda(U - B) \leq \varepsilon$.

<u>Beweis</u> Das ist wahr, falls $B \subseteq [-m,m]^n$ ein Quader ist (wähle für U einen etwas größeren offenen Quader).

Allgemein gilt nach Caratheodorys Fortsetzungssatz

$$\lambda(B) = \inf\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \;\middle|\; A_k \in \mathcal{A}_m(n),\ B \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right\}.$$

Also gibt es $A_k \in \mathcal{A}_m(n)$ mit

$$\lambda(B) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(A_k), \quad \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \supseteq B.$$

Schreibe $A_k = \underbrace{Q_{k,1} \cup \ldots \cup Q_{k,l_k}}_{\text{disjunkte Quader in } [-m,m]^n}$ OE $l_k \geq 1$

Wähle $U_{k,j} \supseteq Q_{k,j}$ offen mit $\lambda(U_{k,j} - Q_{k,j}) \leq \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{1}{l_k} \cdot 2^{-k}$

$U_k = U_{k,1} \cup \ldots \cup U_{k,l_k} \Rightarrow \lambda(A_k) + \frac{\varepsilon}{4} \cdot 2^{-k} \geq \lambda(U_k)$

$U = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k \Rightarrow \lambda\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k\right) \leq \lambda(B) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ $\square$

7. Satz (Approximationssatz für Lebesgue-messbare Mengen)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F \subseteq \mathbb{R}^n$ abg. mit $U \supseteq A \supseteq F$ und

$\lambda(U - A) \le \varepsilon$, $\lambda(A - F) \le \varepsilon$.

Beweis: Schreibe $A = B \cup M$, B, N Borelmengen, $M \subseteq N$, $\mu(N) = 0$, $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es $V_m, W_m \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit

$V_m \supseteq B \cap [-m,m]^n$, $W_m \supseteq M \cap [-m,m]^n \supseteq N \cap [-m,m]^n$

und $\lambda(V_m - (B \cap [-m,m]^n)) \le \frac{\varepsilon}{4} 2^{-m}$

$\lambda(W_m) \le \frac{\varepsilon}{4} 2^{-m}$

Setze $V = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_m$, $W = \bigcup_{k=0}^{\infty} W_m$ $\Rightarrow$ $B \subseteq V$

$M \subseteq W$ $\lambda(W) \le \frac{\varepsilon}{2}$

Weiter $V - B \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} (V_m - \underbrace{(B \cap [-m,m]^n)}_{=: B_m})$, denn

$V - B = V \cap B^c = \bigcup_{m=0}^{\infty} (V_m \cap B^c) = \bigcup_{m=0}^{\infty} \underbrace{(V_m - B)}_{\subseteq V_m - B_m} \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} (V_m - B_m)$

also $\lambda(V - B) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Insgesamt mit $U = V \cup W$

$\lambda(U - A) \le \varepsilon$, denn $U - A = (V - A) \cup (W - A) \subseteq (V - B) \cup W$.

Genauso gibt es $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $A^c \subseteq \tilde{U}$ und

$\lambda(\tilde{U} - A^c) \le \varepsilon$, setze $F = \tilde{U}^c$ $\Rightarrow$ $F \subseteq A$ abg,

$A - F = \tilde{U} - A^c$

$\square$

8. <u>Korollar</u> Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar.

Dann gilt $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) \mid U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}, A \subseteq U\}$

$= \sup\{\lambda(F) \mid F \subseteq \mathbb{R}^n \text{ abg}, F \subseteq A\}$

$= \sup\{\lambda(K) \mid K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ kompakt}, K \subseteq A\}$.

Beweis. Die beiden ersten Gleichungen folgen aus Satz §4.7.(*) Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq r < \lambda(A)$. Dann gibt es $F \subseteq \mathbb{R}^n$ abg. mit $F \subseteq A$ und $\lambda(F) \geq r$. Da $F = \bigcup_{m=0}^{\infty} F \cap [-m,m]^n$ folgt $r \leq \sup\{\lambda(K) \mid K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $K \subseteq A\}$. Damit gilt auch die 3. Gleichung. □

(Hugo Steinhaus, poln. Mathematiker, 1887–1972)

9. <u>Satz</u> (<u>Satz von Steinhaus</u>) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, mit $\lambda(A) > 0$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(0) \subseteq \{u - v \mid u, v \in A\}$.

<u>Beweis</u> Wähle $K \subseteq A$ kompakt mit $\lambda(K) > 0$. Da K beschränkt ist, ist $\lambda(K) < \infty$. Wähle $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subseteq U$ und $\lambda(U) < 2 \cdot \lambda(K)$.

Setze $\varepsilon = \inf\{\|p - q\| \mid p \in K, q \in U^c\}$

(*)

Denn: $U \supseteq A \Rightarrow \lambda(U) \geq \lambda(A)$. Ist

$\lambda(U-A) \leq \varepsilon$, so gilt $\lambda(U) = \lambda(A) + \lambda(U-A) \leq \lambda(A) + \varepsilon$

$\Rightarrow \lambda(A) = \inf \{ \lambda(U) \mid U \supseteq A \text{ offen} \}$

§4.7

entsprechend $\lambda(A) = \sup \{ \lambda(F) \mid F \subseteq A \text{ abg} \}$,

denn $\lambda(F) \leq \lambda(A)$ und $\lambda(A) = \lambda(F) + \underbrace{\lambda(A-F)}_{\leq \varepsilon} \leq \lambda(F) + \varepsilon$

Dann ist $\varepsilon > 0$, denn sonst gäbe es $p_i \in K$, $q_i \in U^c$

mit $\lim_i \| p_i - q_i \| = 0$ ↑ beschränkte Folgen! OE $\lim p_i = p \in K$, $\lim q_i = q \in U^c$

$\Rightarrow p = q \in K \cap U^c$ ↯ Also ist $\varepsilon > 0$.

Für $t \in B_\varepsilon(0)$ ist also $t + K \subseteq U$.

Wenn $(t+K) \cap K = \emptyset$, dann $\lambda((t+K) \cup K) = 2\lambda(K) \leq \lambda(U)$ ↯

Also gibt es $q \in K$ mit $q = t + p$, $p \in K$

Insgesamt $t = p - q \Rightarrow B_\varepsilon(0) \subseteq \{u - v \mid u, v \in A\}$ $\square$

10. <u>Korollar</u> Sei $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine messbare Abbildung mit $f(u+v) = f(u) + f(v)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^m$. Dann ist f linear und stetig.

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$, $A = f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(0))$. Dann ist $A \subseteq \mathbb{R}^m$ messbar. Wegen $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=0}^{\infty} k \cdot B_\varepsilon(0)$

gilt $\mathbb{R}^m = \bigcup_{k=0}^{\infty} k \cdot A$. Folglich ist $\lambda(A) > 0$,

denn $\lambda(kA) = k^m \cdot \lambda(A)$, vgl § 2.13.

Also gibt es $\delta > 0$ mit $B_\delta(0) \subseteq \{u - v \mid u, v \in A\}$

$\Rightarrow f(B_\delta(0)) \subseteq \{u - v \mid u, v \in B_{\varepsilon/2}(0)\} \subseteq B_\varepsilon(0)$

Für jedes $v \in \mathbb{R}^m$ folgt $f(B_\delta(v)) =$
$f(v + B_\delta(0)) = f(v) + f(B_\delta(0)) \subseteq f(v) + B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(f(v))$,
also ist f stetig.

Weiter ist f $\mathbb{Q}$-linear: ist $q \in \mathbb{Q}$, $q = \frac{a}{b}$,
$a, b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 1$, so folgt für $v \in \mathbb{R}^m$

$$b f(qv) = f(av) = a f(v) \Rightarrow f(qv) = q f(v).$$

Ist jetzt $r \in \mathbb{R}$, so gibt es eine Folge $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit
$q_k \in \mathbb{Q}$, $\lim_k q_k = r$, es folgt für $v \in \mathbb{R}^m$,
dass $f(rv) = \lim_k f(q_k v) = \lim_k q_k \cdot f(v) = r f(v)$.

$\square$

<u>Bemerkung</u> Ohne die Annahme der Messbarkeit von f ist das nicht wahr. Denn: $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Sei $\{ v_\xi \mid \xi \in X \}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{R}$ (*) $\Rightarrow$ wir erhalten eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$, die nicht $\mathbb{R}$-linear ist, also nicht messbar (oder stetig) sein kann. (!)

(*) Hier haben wir den <u>Basisergänzungssatz</u> benutzt, der das <u>Auswahlaxiom</u> benötigt.

Einschub zu lim inf, lim sup in $[-\infty,\infty]$

Für eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $[-\infty,\infty]$ definieren wir

$$u = \liminf_k a_k = \lim_k \left(\inf_{l\geq k} a_l\right) \in [-\infty,\infty]$$

$$v = \limsup_k a_k = \lim_k \left(\sup_{l\geq k} a_l\right) \in [-\infty,\infty]$$

Dann gilt

(a) Es gibt eine Teilfolge $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_j a_{k_j} = u$

(bzw $\lim_j a_{k_j} = v$).

Denn: wenn $u \in \mathbb{R}$ wähle $k_0 < k_1 < ..$ so, dass

$$|a_{k_j} - u| \leq \frac{1}{j+1} \rightsquigarrow \lim_j a_{k_j} = u$$

wenn $u = -\infty$ wähle $k_0 < k_1 < ..$ so, dass

$$a_{k_j} \leq -j \rightsquigarrow \lim_j a_{k_j} = -\infty$$

wenn $u = \infty$ wähle $k_0 < k_1 < ..$ so, dass

$$a_{k_j} \geq j \rightsquigarrow \lim_j a_{k_j} = \infty$$

(Entsprechend für lim sup)

(b) Ist $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ irgend eine konvergente Teilfolge

mit $w = \lim_j a_{k_j}$, so folgt $u \leq w \leq v$.

Also ist u der kleinste und v der größte Häufungspunkt von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. $\square$

#

Jetzt betrachten wir Konvergenzsätze für Integrale.

11. <u>Satz</u> (Satz von der monotonen Konvergenz / Satz von Beppo Levi)
(B. Levi, italienischer Mathematiker, 1875–1961)

Sei $(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ ein Maßraum, seien $f_k : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar mit $0 \le f_0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$, sei $f = \lim_k f_k$.

Dann gilt $\int_\Omega f \, d\mu = \lim_k \int_\Omega f \, d\mu = \sup_k \int_\Omega f_k \, d\mu$.

<u>Beweis</u> Die Funktion f ist messbar (§3.4) und wegen $f_k \le f$ folgt $\int_\Omega f_k \, d\mu \le \int f \, d\mu$, vgl. §3.16.

Also gilt $\sup_k \int_\Omega f_k \, d\mu = \lim_k \int_\Omega f_k \, d\mu \le \int f \, d\mu$.

Nach §3.8 existieren Elementarfunktionen $g_{k,j} \in E_+(\mathcal{A})$

mit $0 \le g_{k,0} \le g_{k,1} \le \dots$, $f_k = \lim_j g_{k,j}$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
f_0 & \le & f_1 & \le & f_2 & \le & f_3 \; \le \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
g_{02} & & g_{12} & & g_{22} & & \\
\rotatebox{90}{$\le$} & & \rotatebox{90}{$\le$} & & \rotatebox{90}{$\le$} & & \\
g_{0,1} & & g_{11} & & g_{21} & & \\
\rotatebox{90}{$\le$} & & \rotatebox{90}{$\le$} & & \rotatebox{90}{$\le$} & & \\
g_{0,0} & & g_{10} & & g_{2,0} & &
\end{array}
$$

Setze $h_n = \max\{g_{k,j} \mid k,j \le n\} = \max\{g_{k,n} \mid k \le n\}$

Es folgt $h_n \in E_+(\Omega)$, $0 \le h_n \le h_{n+1}$, $h_n \le f_n \le f$

Weiter ist $\sup_j h_j = \sup_{j \ge k} h_j \ge \sup_{j \ge k} g_{k,j} = f_k$, also

$$\int_\Omega f \, d\mu \underset{\substack{\uparrow \\ \S 3.14}}{=} \sup_k \int_\Omega h_k \, d\mu \le \sup_k \int_\Omega f_k \, d\mu . \qquad \square$$

12. Korollar Sei $g_k : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar, $g_k \ge 0$.

Dann gilt $\displaystyle\int_\Omega \sum_{k=0}^{\infty} g_k \, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Omega g_k \, d\mu$.

Denn: $f_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} g_j$ ist monoton steigende Folge messbarer Funktionen. $\square$

13. Satz (Lemma von Fatou)

(Pierre Fatou, franz. Math. 1878–1929)

Sei (A, Ω, μ) ein Maßraum, $f_k : \Omega \to [0, \infty]$ messbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_\Omega \liminf_k f_k \, d\mu \le \liminf_k \int_\Omega f_k \, d\mu .$$

Bsp $f_k = \chi_{[k,\infty)}$ $\leadsto$ $\liminf_k f_k = 0$ und

$\displaystyle\int_\Omega f_k \, d\mu = \infty$.

Beweis Wir setzen $g_\ell = \inf_{k \geq \ell} f_k$, damit gilt

$f = \liminf_k f_k = \lim_\ell g_\ell$ sowie $0 \leq g_0 \leq g_1 \leq \dots$,

nach §4.11 (Beppo Levi) gilt $\int_\Omega f \, d\mu = \lim_\ell \int_\Omega g_\ell \, d\mu$.

Wegen $g_\ell \leq f_k$ für $k \geq \ell$ folgt $\int_\Omega g_\ell \, d\mu \leq \int_\Omega f_k \, d\mu$

für $k \geq \ell$, also $\int_\Omega g_\ell \, d\mu \leq \liminf_k \int_\Omega f_k \, d\mu$. $\square$

14. Satz (Satz von der majorisierten Konvergenz / Satz von Lebesgue)

Sei $(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ ein Maßraum, seien $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $(f_k(p))_{k \in \mathbb{N}}$ für fast alle $p \in \Omega$ konvergent. Weiter sei $g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar, $g \geq 0$, mit $|f_k| \leq g$ und $\int_\Omega g \, d\mu < \infty$.

Dann gibt es $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$ mit $\lim_k f_k(p) = f(p)$ fast überall.

Für jedes solche f gilt $\lim_k \int_\Omega |f - f_k| \, d\mu = 0$,

insbesondere ist $\int_\Omega f \, d\mu = \lim_k \int_\Omega f_k \, d\mu$.

Sei $N \subseteq \Omega$ eine Nullmenge so, dass für alle $p \in N^c$ gilt: (i) $g(p) < \infty$ (vgl §4.3) (ii) $(f_k(p))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Setze $f(p) = \begin{cases} 0 & p \in N \\ \lim\limits_{k \in \mathbb{N}} f_k(p) & p \in N^c \end{cases}$, es folgt $|f(p)| < \infty$

sowie $|f| \leq g$. Dann ist $f = \lim\limits_k f_k \cdot \chi_{N^c}$ messbar, vgl §3.4 und integrierbar, weil $\int_\Omega |f| \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu < \infty$.

Sei jetzt $f \in \mathcal{L}^1(A, \Omega, \mu)$ mit $\lim\limits_k f_k(p) = f(p)$ fast überall, setze $h_k = |f - f_k|$. Dann gilt

$0 \leq h_k \leq |f| + |f_k| \leq |f| + g \Rightarrow h_k \in \mathcal{L}^1(A, \Omega, \mu)$.

Nach §4.13 gilt

$$\int_\Omega \underbrace{\liminf_k (|f| + g - h_k)}_{= |f| + g \text{ fast überall}} d\mu \leq \liminf_k \int_\Omega (|f| + g - h_k) \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (|f| + g) \, d\mu \leq \int_\Omega (|f| + g) \, d\mu - \limsup_k \int_\Omega h_k \, d\mu$$

$$\Rightarrow \limsup_k \underbrace{\int_\Omega h_k \, d\mu}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow \lim_k \int_\Omega h_k \, d\mu = 0.$$

Schließlich ist $\left| \int_\Omega f \, d\mu - \int_\Omega f_k \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f - f_k| \, d\mu$

$\square$