§ 6. Produkt von Maßräumen

Erinnerung: Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und ist $f: \Omega_0 \to \Omega$ eine Abbildung, so ist $f^*(\mathcal{A}) = \{ f^{-1}(E) \mid E \in \mathcal{A} \}$ eine σ-Algebra auf Ω_0 und $f: \Omega_0 \to \Omega$ ist $f^*(\mathcal{A})$-$\mathcal{A}$-messbar. Ist $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{A}$ ein Erzeugendensystem, $\langle \mathcal{Z} \rangle_{\sigma\text{-Alg}} = \mathcal{A}$, so gilt $f^*(\mathcal{A}) = \langle f^*(\mathcal{Z}) \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$.

1. Def Seien $(\mathcal{A}_1, \Omega_1), \dots, (\mathcal{A}_m, \Omega_m)$ Messräume (d.h. $\mathcal{A}_i$ ist σ-Algebra auf Ω_i). Wir setzen $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_m$ sowie $pr_i: \Omega \to \Omega_i$, $pr_i(u_1, \dots, u_m) = u_i$. Sei $\tilde{\mathcal{A}}_i = pr_i^*(\mathcal{A}_i)$.

Wir definieren

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_m = \left\langle \bigcup_{i=1}^{m} \tilde{\mathcal{A}}_i \right\rangle_{\sigma\text{-Alg}}$$

und nennen $\mathcal{A}$ das Produkt der σ-Algebren $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$.

Beachte: pr_i ist dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_i$-messbar.

2. Lemma Seien $(\mathcal{A}_0,\Omega_0), (\mathcal{A}_1,\Omega_1), \dots, (\mathcal{A}_m,\Omega_m)$ Messräume, $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_m$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_m$.

Sei $f: \Omega_0 \to \Omega$ ein Abbildung. Dann sind äquivalent: (i) f ist $\mathcal{A}_0$-$\mathcal{A}$-messbar

(ii) für jedes $i = 1, \dots, m$ ist $pr_i \circ f : \Omega_0 \to \Omega_i$ $\mathcal{A}_0$-$\mathcal{A}_i$-messbar.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii): f messbar, pr_i messbar $\Rightarrow$ $pr_i \circ f$ auch messbar. (v)

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wenn alle $pr_i \circ f$ messbar sind, so gilt $f^*(\tilde{\mathcal{A}}_i) \subseteq \mathcal{A}_0$ für $i = 1, \dots, m$ $\rightsquigarrow \left\langle \bigcup_{i=1}^m f^*(\tilde{\mathcal{A}}_i) \right\rangle_{\sigma\text{-Alg}} \subseteq \mathcal{A}_0$

mit $\left\langle \bigcup_{i=1}^m f^*(\tilde{\mathcal{A}}_i) \right\rangle_{\sigma\text{-Alg}} = f^*\left(\left\langle \bigcup_{i=1}^m \tilde{\mathcal{A}}_i \right\rangle_{\sigma\text{-Alg}} \right) = f^*(\mathcal{A})$. $\square$

Beacht: $pr_i^{-1}(E) = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times E \times \Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_m$.

#

3. Lemma Sei $(\mathcal{A}_1,\Omega_1), \dots, (\mathcal{A}_m,\Omega_m)$ Messräume, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_m$. Seien $\mathcal{Z}_i \subseteq \mathcal{A}_i$ Erzeugendensysteme, $\langle \mathcal{Z}_i \rangle_{\sigma\text{-Alg}} = \mathcal{A}_i$. Wenn es $E_{ij} \in \mathcal{Z}_i$ gibt, $i = 1, \dots, m$, $j \in \mathbb{N}$ mit $\Omega_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} E_{ij}$, dann wird $\mathcal{A}$ erzeugt von Mengen der Form $F_1 \times \dots \times F_m$ mit $F_i \in \mathcal{Z}_i$.

Beweis Ist $F_i \in \mathcal{Z}_i$ für $i = 1, \dots, m$, so ist

$$F_1 \times \dots \times F_m = pr_1^{-1}(F_1) \cap pr_2^{-1}(F_2) \cap \dots \cap pr_m^{-1}(F_m) \in \mathcal{A}.$$

Nach § 1.12 wird $\mathcal{A}$ erzeugt von Mengen der Form

$$pr_i^{-1}(F_i) = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times F_i \times \Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_m.$$

Setze $\tilde{E}_{ij} = \bigcup_{k=0}^{j} E_{ik}$, dann gilt

$$\Omega_1 \times \dots \times F_i \times \dots \times \Omega_m = \bigcup_{j=0}^{\infty} \tilde{E}_{1,j} \times \dots \times \tilde{E}_{i-1,j} \times F_i \times \tilde{E}_{i+1,j} \times \dots \times \tilde{E}_{m,j}$$

$$= \bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcup_{k_1, \dots, k_m \leq j} E_{1,k_1} \times \dots \times E_{i-1,k_{i-1}} \times F_i \times E_{i+1,k_{i+1}} \times \dots \times E_{m,k_m}$$

$\square$

4. Korollar Es gilt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{m \text{ Faktoren}}.$$

Denn: $\mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} [-n, n]$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \langle J \subseteq \mathbb{R} \mid J \text{ Intervall} \rangle_{\sigma\text{-Alg.}}$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \langle J_1 \times \dots \times J_m \mid J_i \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall} \rangle_{\sigma\text{-Alg}} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

$\square$

5. Lemma Seien $(\mathcal{A}_1, \Omega_1)$, $(\mathcal{A}_2, \Omega_2)$ Messräume, sei $u \in \Omega_1$. Dann ist die Abbildung

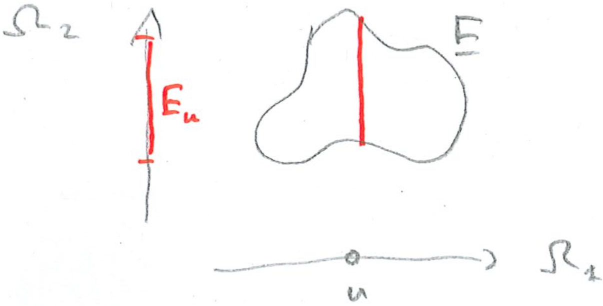
$$\varphi : \Omega_2 \to \Omega_1 \times \Omega_2, \quad v \mapsto (u, v) \quad \mathcal{A}_2\text{-}\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2\text{-messbar.}$$

Bew. Die Mengen $E_1 \times E_2$, $E_i \in \mathcal{A}_i$, erzeugen $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Es gilt $\varphi^{-1}(E_1 \times E_2) = \begin{cases} \emptyset & \text{wenn } u \notin E_1 \\ E_2 & \text{wenn } u \in E_1 \end{cases}$

also ist φ messbar. □

6. Ist $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $u \in \Omega_1$, so setzen wir

$$E_u = \{ v \in \Omega_2 \mid (u,v) \in E \} \in \mathcal{A}_2$$



$\{u\} \times E_u = (\{u\} \times \Omega_2) \cap E$

E_u ist messbar nach §6.5.

7. Lemma Sei $(\mathcal{A}_1, \Omega_1)$ ein Messraum und sei $(\mathcal{A}_2, \Omega_2, \mu_2)$ ein σ-endlicher Maßraum. Sei $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Dann ist die Abbildung

$$s_E : \Omega_1 \to [-\infty, \infty], \quad u \longmapsto \mu_2(E_u) \quad \text{messbar.}$$

Bew. Wir betrachten zuerst den Fall $\boxed{\mu_2(\Omega_2) < \infty.}$

Sei $\mathcal{D} = \{ D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \mid s_D \text{ ist messbar} \}$.

Beh: $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System.

Denn $s_{\Omega_1 \times \Omega_2}(u) = \mu_2(\Omega_2) = \text{const} \rightsquigarrow \Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{D}$.

Angenommen $D \in \mathcal{D}$, zeige $D^c \in \mathcal{D}$.

$$(D^c)_u = \{ v \in \Omega_2 \mid (u,v) \notin D \} = \Omega_2 - D_u = (D_u)^c$$

$$s_{D^c}(u) = \mu_2((D_u)^c) = \mu_2(\Omega_2) - \mu_2(D_u)$$
$$= \mu_2(\Omega_2) - s_D(u) \quad \underline{\text{messbar}}.$$

$\rightsquigarrow D^c \in \mathcal{D}$.

Angenommen, $D_n \in \mathcal{D}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $D_i \cap D_j = \emptyset$ für $i \neq j$.
$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$

Dann gilt $D_u = \bigcup_{n=0}^{\infty} (D_n)_u \qquad (D_i)_u \cap (D_j)_u = \emptyset$ für $i \neq j$

$\rightsquigarrow s_D(u) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{D_n}(u)$ messbar nach § 3.4

also ist $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$. Damit ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System. $\square$

Für $E_i \in \mathcal{A}_i$ gilt mit $E = E_1 \times E_2$, dass

$s_E(u) = \mu(E_2) \cdot \chi_{E_1}(u)$, also ist $\in \mathcal{D}$.

$\mathcal{E} = \{ E_1 \times E_2 \mid E_i \in \mathcal{A}_i \} \subseteq \mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ ist $\cap$-stabil.

Nach Sierpinski-Dynkin § 1.10. gilt

$$\langle \mathcal{E} \rangle_{Dyn} = \underset{\underset{\displaystyle \mathcal{A}}{\parallel}}{\langle \mathcal{E} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}} \subseteq \mathcal{D}, \quad \text{also } \mathcal{D} = \mathcal{A}. \quad \square$$

Angenommen, $\boxed{\mu_2 \text{ ist } \sigma\text{-endlich}}$. Dann gibt es messbare $B_k \subseteq \Omega_2$, $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots$ mit $\Omega_2 = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$ und $\mu_2(B_k) < \infty$. Definiere $\nu_k(A) = \mu_2(A \cap B_k) \rightsquigarrow \nu_k$ ist endliches Maß auf Ω_2, $\mu_2(A) = \sup_k \nu_k(A)$ und für jedes k ist

$s_{E,k}(u) = \nu_k(E_u)$ messbar. Damit ist auch

$s_E(u) = \sup_k s_{E,k}(u)$ messbar. $\square$

8. <u>Satz</u> Seien $(\mathcal{A}_1, \Omega_1)$, $(\mathcal{A}_2, \Omega_2)$ σ-endliche Maßräume. Dann gibt es genau ein Maß ν auf $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \Omega_1 \times \Omega_2)$ mit

$$\nu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1) \cdot \mu_2(E_2)$$

für alle $E_i \in \mathcal{A}_i$. Dieses Maß ν ist σ-endlich, und es gilt

$$\nu(E) = \int_{\Omega_1} s_E \, d\mu_1 .$$

<u>Beweis</u> Sei $E \in \mathcal{A}$. Dann ist $s_E : \Omega_1 \to [-\infty, \infty]$ messbar nach §6.7, $s_E \geq 0$ und wir definieren

$$\nu(E) = \int_{\Omega_1} s_E \, d\mu_1 .$$

Für $E = E_1 \times E_2$ ist

$s_E = \mu_2(E_2) \cdot \chi_{E_1}$, also $\nu(E_1 \times E_2) = \mu_2(E_2) \cdot \mu_1(E_1)$.

Weiter ist $s_\emptyset = 0$, also $\nu(\emptyset) = 0$.

Sind $E_k \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ paarweise disjunkt, $E = \dot{\bigcup}_{k=0}^{\infty} E_k$, so gilt $s_E(u) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{E_k}(u)$ und damit

$$\nu(E) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu(E_k) \quad , \text{ vgl } §4.12 .$$

Daher ist ν ein Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Seien $B_{i,k} \in \mathcal{A}_i$ mit $\mu_i(B_{i,k}) < \infty$ und

$B_{i,0} \subseteq B_{i,1} \subseteq \ldots$, $\bigcup_{k=0}^{\infty} B_{i,k} = \Omega_i$ sowie

$\mathcal{C} = \{ E_1 \times E_2 \mid E_i \in \mathcal{A}_i \}$. Dann ist $\mathcal{C}$ $\cap$-stabiler EZS von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $\nu(B_{1,k} \times B_{2,k}) < \infty$,

$\Omega_1 \times \Omega_2 = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{1,k} \times B_{2,k}$. Nach dem Identitätssatz §2.9 bestimmt das ν eindeutig, und ν ist σ-endlich. $\square$

Bemerkung Es folgt

$$\nu_E = \int_{\Omega_2} s'_E \, d\mu_2 \quad \text{mit}$$

$$s_E'(v) = \mu_1\{u \in \Omega_1 \mid (u,v) \in E\}.$$

Man nennt ν das Produkt der Maße μ_1, μ_2 und schreibt $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

9. Korollar Seien $(A_1, \Omega_1, \mu_1), \dots, (A_m, \Omega_m, \mu_m)$ σ-endliche Maßräume, $A = A_1 \otimes \dots \otimes A_m$. Dann gibt es genau ein Maß $\nu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_m$ auf A mit

$$\nu(E_1 \times \dots \times E_m) = \mu_1(E_1) \cdot \dots \cdot \mu_m(E_m)$$ und

ν ist σ-endlich.

Beweis Die Existenz folgt mit Induktion aus § 6.8.

Die Eindeutigkeit geht wie im Beweis von § 6.8:

sei $B_{i,k} \in A_i$ mit $B_{i,0} \subseteq \dots \subseteq B_{i,k} \subseteq \dots$,

$\mu_i(B_{i,k}) < \infty$, $\bigcup_{k=0}^{\infty} B_{i,k} = \Omega_i$

$\mathcal{C} = \{E_1 \times \dots \times E_m \mid E_i \in A_i\}$ ist $\cap$-stabiles EZS von A, $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} (B_{1,k} \times \dots \times B_{m,k})$, jetzt

Identitätssatz § 2.9. $\square$

Ist λ^k das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^k$, so folgt $\lambda^k \otimes \lambda^l = \lambda^{k+l}$, denn die Quader bilden ein $\cap$-stabiles EZS von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+l})$.

10. <u>Satz (Satz von Tonelli)</u> Sei (A_1, Ω_1, μ_1) und (A_2, Ω_2, μ_2) σ-endliche Maßräume. Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [-\infty, \infty]$ messbar und $f \geq 0$.

Dann sind auch $F_1(u) = \int_{\Omega_2} f(u, -)\, d\mu_2$ und $F_2(v) = \int_{\Omega_1} f(-, v)\, d\mu_1$ messbar und es gilt

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} F_1 \, d\mu_1 = \int_{\Omega_2} F_2 \, d\mu_2 \qquad \#$$

<u>Beweis</u> Sei $A = A_1 \otimes A_2$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2$

(a) Angenommen, $f = \chi_E$, $E \in A$.

Dann gilt $\int_\Omega f \, d\nu = \nu(E)$ und

$$F_1(u) = \int_{\Omega_2} \chi_E(u, -)\, d\mu_2 = \int_{\Omega_2} \chi_{E_u}\, d\mu_2 = \mu_2(E_u)$$

$= s_E(u) \Rightarrow F_1$ messbar

Nach Definition ist $\int_{\Omega_1} F_1 \, d\mu_1 = \nu(E)$. $\square$

(b) Für $f \in E_+(A)$ ist das auch wahr.

Denn: $f = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \chi_{A_i}$ $\qquad a_i \geq 0$

$$\int_\Omega f \, d\nu = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \nu(A_i)$$

$F_1 = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot s_{A_i}$ ist messbar und

$$\int_{\Omega_1} F_1 \, d\mu_1 = \sum_{i=1}^{m} a_i \int_{\Omega_1} s_{A_i} \, d\mu_1 = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \nu(A_i) \qquad \square$$

(c) Jetzt allgemein $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar, $f \geq 0$. Dann gibt es nach § 3.8 $f_k \in E_+(A)$ mit $0 \leq f_0 \leq f_1 \leq \dots$ und $\lim f_k = f$, und

$$\int_\Omega f \, d\nu = \sup_k \int_\Omega f_k \, d\nu \quad \text{(nach Definition)}$$

Weiter ist $F_{1,k}(u) = \int_{\Omega_2} f_k(u, -) \, d\mu_2$ messbar,

$F_{1,0} \leq F_{2,0} \leq \dots$ setze $F_1(u) = \sup_k F_{1,k}$,

dann gilt nach Beppo Levi § 4.11

$$F_1(u) = \int_{\Omega_2} \sup_k f_k(u, -) \, d\mu_2 = \int_{\Omega_2} f(u, -) \, d\mu_2$$

Insgesamt also

$$\int_\Omega f\,d\nu = \sup_k \int_\Omega f_k\,d\nu \overset{(b)}{=} \sup_k \int_{\Omega_1} F_{1,k}\,d\mu_1$$

$$= \int_{\Omega_1} F_1\,d\mu_1 \quad \text{mit} \quad F_1(u) = \int_\Omega f(u,-)\,d\mu_2 \qquad \square$$

11. <u>Theorem</u> (<u>Satz von Fubini</u>)

Seien (A_1, Ω_1, μ_1) und (A_2, Ω_2, μ_2) σ-endliche Maßräume, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $A = A_1 \otimes A_2$, $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2$, sei $F : \Omega \to [-\infty, \infty]$ integrierbar.

Dann gibt es eine Nullmenge $N_1 \subseteq \Omega_1$ so, dass $F(u,-)$ für alle $u \in N_1^c$ integrierbar ist.

Mit
$$F_1(u) = \begin{cases} 0 & u \in N_1 \\ \int_\Omega F(u,-)\,d\mu_2 & u \in N_1^c \end{cases}$$

gilt
$$\int_\Omega F\,d\nu = \int_{\Omega_1} F_1\,d\mu_1$$

Man schreibt auch kurz und suggestiv

$$\int_\Omega F\,d\nu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} F(u,v)\,d\mu_2(v) \right) d\mu_1(u)$$

$$= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} F(u,v)\,dv \right) du.$$

Beweis. Nach §6.10 (Tonelli) gilt

$$\int_{\Omega} |F| \, d\nu = \int_{\Omega_1} h \, d\mu_1 \quad \text{mit} \quad h(u) = \int_{\Omega_2} |F(u,-)| \, d\mu_2$$

Setze $N = \{ u \in \Omega_1 \mid h(u) = \infty \}$, dann ist N eine Nullmenge nach §4.5. Weiter ist $N \times \Omega_2$ eine Nullmenge, $\nu(N \times \Omega_2) = \mu_1(N) \cdot \mu_2(\Omega_2) = 0$. Wir definieren

$$\tilde{F}(u,v) = \begin{cases} F(u,v) & \text{wenn } u \in N^c \\ 0 & \text{wenn } u \in N \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\int_{\Omega} F \, d\nu = \int_{\Omega} \tilde{F} \, d\nu$. Weiter ist $\int_{\Omega_2} |\tilde{F}(u,-)| \, d\mu_2 < \infty$ für alle $u \in \Omega_1$.

Jetzt $\int_{\Omega} \tilde{F}_+ \, d\nu = \int_{\Omega_1} F_+ \, d\mu_1$, $F_+(u) = \int_{\Omega_2} \tilde{F}(u,-) \, d\mu_2 < \infty$

$$\int_{\Omega} (-\tilde{F}_-) \, d\nu = \int_{\Omega_1} F_- \, d\mu_1 , \quad F_-(u) = \int_{\Omega_2} (-\tilde{F}_-(u,-)) \, d\mu_2 < 0$$

mit $F_1(u) = F_+(u) - F_{-}(u) = \int_{\Omega_2} \tilde{F}(u,-) \, d\mu_2$

Folgt $\int_{\Omega} \tilde{F} \, d\nu = \int_{\Omega_1} F_1 \, d\mu_1$. wie behauptet.

□

12. Beispiel Die Γ-Funktion und das Kugelvolumen

(a) Die Γ-Funktion ist für $s>0$ definiert als

$$\int_0^\infty u^{s-1}\exp(-u)\,du = \int_0^\infty \frac{1}{u}\cdot u^s\cdot\exp(-u)\,du$$

Warum ist das Integral endlich?

Für $\frac{1}{n+1} \le u \le 1$ ist $\frac{1}{u}\cdot u^s\cdot\exp(-u) \le \frac{1}{u}u^s$

und $\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{1}{u}u^s\,du = \frac{1}{s}\Big[u^s\Big]_{\frac{1}{n+1}}^{1} \le \frac{1}{s} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{u}u^s\,ds = \frac{1}{s}$

Für $1 \le u < \infty$ ist $\frac{1}{u}\cdot u^s\cdot\exp(-u) \le u^s\cdot\exp(-u) \le u^m\cdot\exp(-u)$
und $m\in\mathbb{N}, m\ge s$

und $\int_1^\infty u^m\cdot\exp(-u)\,du \le \int_0^\infty u^m\cdot\exp(-u)\,du = m! < \infty$ nach

§ 5.13. Es folgt $\int_0^\infty u^{s-1}\exp(-u)\,du \le \frac{1}{s} + m!$.

(b) Für $s>0$ gilt $\Gamma(s+1) = s\cdot\Gamma(s)$.

Denn: $h(u) = u^s\cdot\exp(-u)$

$h'(u) = s u^{s-1}\cdot\exp(-u) - u^s\cdot\exp(-u)$

$$\Rightarrow \Big[h(u)\Big]_a^b = s\int_a^b u^{s-1}\exp(-u)\,du - \int_a^b u^s\exp(-u)\,du$$

$h(0)=0$, $\lim_{u\to\infty} h(u) \le \lim_{u\to\infty} u^m\cdot\exp(-u) = 0$ für $m\ge s$, $m\in\mathbb{N}$

also $0 = s\cdot\Gamma(s) - \Gamma(s+1)$.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff'bar, $f(r) = f(-r) \geq 0$.

Setze $h(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} h \, d\lambda^2 = 2\pi \int_0^\infty f(r) \cdot r \, dr$$

Beweis: $\int_{\mathbb{R}^2} h \, d\lambda^2 = 4 \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty f(\sqrt{x^2+y^2}) \, dy \, dx$

$y = x \cdot \tan\alpha$

$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\frac{dy}{d\alpha} = x \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$

$$= 4 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{x^2+y^2}) \, x \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \, d\alpha \, dx$$

$x = r \cdot \cos(\alpha)$

$\frac{dx}{dr} = \cos(\alpha)$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty f(r) \cdot r \cdot \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \, d\alpha \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^r f(r) \cdot r \, dr$$

(d) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Beweis: $\Gamma(\frac{1}{2}) \geq 0$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{\exp(-u)}{\sqrt{u}} \, du$

$u = v^2$

$\frac{du}{dv} = 2v$

$$= \int_0^\infty \frac{\exp(-v^2)}{v} \cdot 2v \, dv = \int_{-\infty}^\infty \exp(-v^2) \, dv$$

$$\rightsquigarrow \Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp(-u^2-v^2) \, dv \, du$$

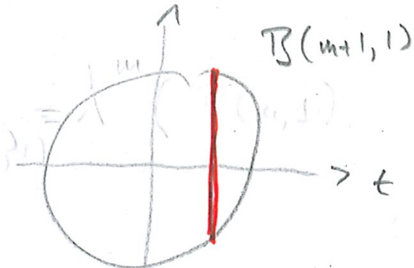
$$\overset{(c)}{=} 2\pi \int_0^\infty \exp(-r^2)\, r\, dr = \pi \text{, denn } \frac{d}{dr}\frac{1}{2}\exp(-r^2) = -r\exp(-r^2)$$

#

(e) Wir setzen $B(m,t) = \{ v \in \mathbb{R}^m \mid \|v\|_2 \leq t \}$ sowie $\omega_m = \lambda^m(B(m,1))$ Volumen der m-Kugel vom Radius 1, $\lambda^m(B(m,t)) = t^m \cdot \omega_m$, $t \geq 0$.

Wir erhalten aus $\lambda^{m+1} = \lambda^1 \otimes \lambda^m$, dass

$$\omega_{m+1} = \int_{-1}^{1} \vartheta_{B(m+1,1)}\, d\lambda,$$



$$\vartheta_{B(m+1,1)}(t) = \lambda^m\left(B(m+1,1)_t \right)$$

$$= \lambda^m\left(B(m, \sqrt{1-t^2}) \right) = \omega_m \cdot (1-t^2)^{\frac{m}{2}}$$

$$\text{also } \omega_{m+1} = \omega_m \cdot \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{m}{2}}\, dt = \omega_m \cdot C_{m+1}$$

$$C_{m+1} = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{m}{2}}\, dt \overset{\circledast}{=} 2\int_0^{\pi/2} \sin^{m+1}(x)\, dx$$

$(t = \cos(x))$

Mit partieller Integration ergibt sich

$$C_{2\ell} = \pi \cdot \prod_{j=1}^{\ell} \frac{2j-1}{2j} \qquad C_{2\ell+1} = 2 \cdot \prod_{j=1}^{\ell} \frac{2j}{2j+1}$$

$$\Rightarrow C_m \cdot C_{m-1} = \frac{2\pi}{m}, \qquad \omega_{m+2} = \frac{2\pi}{m+2} \cdot \omega_m$$

$\circledast$ Forster Analysis I, § 19.24

Wir haben $\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = \pi$

Behauptung: $\omega_m = \dfrac{\pi^{m/2}}{\frac{m}{2}\cdot\Gamma(\frac{m}{2})} = \dfrac{\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}$

Das ist wahr für $m = 1, 2$ (s. o.), jetzt Induktion.

$$\omega_{m+2} = \frac{2\pi}{m+2} \; \frac{\pi^{m/2}}{\frac{m}{2}\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{\pi^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{m+2}{2}\Gamma(\frac{m+2}{2})} \qquad (v)$$

$\square$

Wir betrachten jetzt <u>Faltungen</u> (und Glättungen).

13. Vorüberlegung. Für $b \in \mathbb{R}^m$, $a = \pm 1$ definiere $\alpha : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ durch $\alpha(x) = a \cdot x + b$. Dann gilt $\lambda^m(E) = \lambda^m(\alpha^{-1}(E))$ für alle Borel- oder Lebesgue-messbaren $E \subseteq \mathbb{R}^m$, vgl. §2 (Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes)

Es folgt
$$\int_{\mathbb{R}^m} \chi_E \, d\lambda^m = \lambda^m(E) = \lambda^m(aE - ab)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^m} \chi_E \circ \alpha \, d\lambda^m.$$
Daher gilt $\int_{\mathbb{R}^m} f \, d\lambda^m = \int_{\mathbb{R}} f \circ \alpha \, d\lambda^m$ für alle Elementarfunktionen $f \in E_+(\mathbb{R}^m)$ und damit auch für alle messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^m \to [-\infty, \infty]$ mit $f \geq 0$. □

14. <u>Satz</u> (Faltung von Funktionen) Sei $V = \mathcal{L}^1(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \mathbb{R}^m, \lambda^m)$, seien $f, g \in V$. Dann gibt es $h \in V$ so, dass für fast alle $u \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$h(u) = \int_{\mathbb{R}^m} f(u - v) g(v) \, dv$$

Schreibe $h = f * g$, es gilt $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

<u>Beweis</u> Betrachte $\varphi(u,v) = f(u-v)\cdot g(v)$.

Dann ist $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ messbar (denn $(u,v) \mapsto f(u-v)$ und $(u,v) \mapsto g(v)$ sind messbar)

und
$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} |\varphi| \, d\lambda^{2m} \underset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi(u,v)| \, du \, dv$$
$$= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} |f(u-v)|\cdot|g(v)| \, du \, dv$$
$$= \int_{\mathbb{R}^m} \|f\|_1 \, |g(v)| \, dv = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty$$

Folglich gilt $\int_{\mathbb{R}^m} |\varphi(u,v)| \, dv < \infty$ für alle $u \in N^c$, $N \subseteq \mathbb{R}^m$ Nullmenge. Definiere
$$h(u) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(u,v) \, dv & u \in N^c \\ 0 & u \in N \end{cases}$$

$$\underset{\text{Fubini}}{\Rightarrow} \int_{\mathbb{R}^m} |h(u)| \, du = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty, \quad h \text{ integrierbar}$$
mit $\|h\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$. $\square$

Man nennt h die <u>Faltung</u> von f und g.

Beachte: h ist eindeutig definiert bis auf Nullmengen.

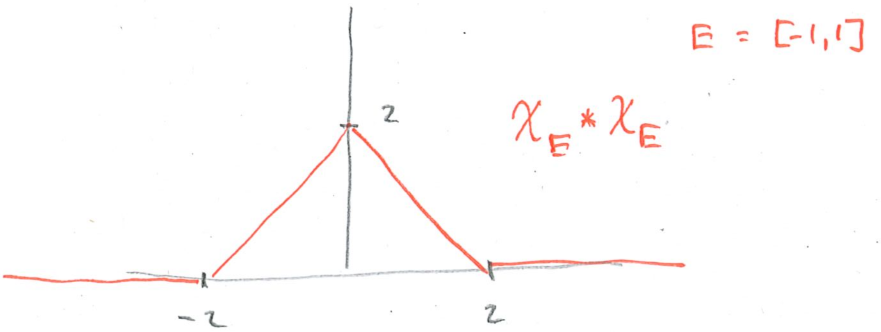
$\underline{h} \in L^1(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \mathbb{R}^m, \lambda^m)$ ist eindeutig bestimmt durch $\underline{f}, \underline{g}$ und $\underline{h} = \underline{f*g} \overset{DEF}{=} \underline{f} * \underline{g}$.

Beispiel $E, F \subseteq \mathbb{R}^m$ Borel-Mengen,

$$\chi_E(u-v)\cdot\chi_F(v) = \begin{cases} 1 & u-v\in E \text{ und } v \in F \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \chi_{F\cap(u-E)}(v) \Rightarrow (\chi_E * \chi_F)(u) = \lambda^m(F\cap(u-E)).$$

Speziell für $m = 1$, $E = F = [-1,1]$



15 **Satz** Die Faltung ist kommutativ, bilinear und assoziativ, d.h.

$$(f_1+f_2)*g = f_1*g + f_2*g \quad \text{fast überall}$$
$$f*(g_1+g_2) = f*g_1 + f*g_2 \quad \text{fast überall}$$
$$f*g = g*f \quad \text{fast überall}$$
$$(f*g)*h = f*(g*h) \quad \text{fast überall}$$
$$(s\cdot f)*g = s(f*g) = f*(sg) \quad \text{fast überall}$$

Beweis $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} (f_1(u-v) + f_2(u-v))\,g(v)\,dv$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} f_1(u-v)\,g(v)\,dv + \int_{\mathbb{R}^m} f_2(u-v)\,g(v)\,dv \quad (\vee)$$

ähnlich folgen die anderen Gleichungen zur Bilinearität.

Zur <u>Kommutativität:</u> $v \mapsto b - v$

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(u-v)\,g(v)\,dv = \int_{\mathbb{R}^m} f(u-b+v)\,g(b-v)\,dv$$

$$\underset{b=u}{=} \int_{\mathbb{R}^m} f(v)\,g(u-v)\,dv \,.$$

Zur <u>Assoziativität:</u> OE $f, g, h \geq 0$

$$((f*g)*h)(u) = \int_{\mathbb{R}^m} (f*g)(u-w)\,h(w)\,dw$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} f(u-w-v)\,g(v)\,h(w)\,dv\,dw \qquad (v \mapsto v-w)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} f(u-v)\,g(v-w)\,h(w)\,dv\,dw$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} f(u-v)\,g(v-w)\,h(w)\,dw\,dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} f(u-v)\,(g*h)(v)\,dv = (f*(g*h))(u) \,.$$

Jetzt $f = f_+ + f_-$ etc. mit Bilinearität. $\square$