Prof. Dr. J. Lohkamp
T. Nguyen
Dr. D. Skodlerack

WS 13

1. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Montag, den 28.10.2013, 10:15 im Zettelkasten 19 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Zulässige Karten, Atlanten, Vektorfelder, Satz vom Igel

Aufgabe 1.1 (Die Einheitssphäre, 4 Punkte)

Geben Sie für die Einheitssphäre S^n mit der von $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Topologie einen C^∞-Atlas an. Erfüllt S^n das zweite Abzählbarkeitsaxiom?

Aufgabe 1.2 (Einheitszylinder, 4 Punkte)

Wir betrachten die folgende Menge

$$Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$$

mit der von $\mathbb{R}^3$ induzierten Topologie. Zeigen Sie, dass Z eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 1.3 (Vektorfeld auf dem Einheitszylinder, 4 Punkte)

Wir betrachten dem Einheitszylinder Z aus der vorherigen Aufgabe. Zeigen Sie, dass die durch

$$X(x, y, z) := (-y, x, 2z), (x, y, z) \in Z,$$

definierte Abbildung eine glattes Vektorfeld auf Z ist, und geben Sie den Fluss von X an, d.h. die glatte Abbildung $\phi : \mathbb{R} \times Z \to Z$, so dass für jedes $p \in Z$ die Abbildung

$$t \mapsto \phi(t, x), t \in \mathbb{R}$$

die Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)),\ t \in \mathbb{R}, \gamma(0) = p,$$

erfüllt.

Aufgabe 1.4 (Tangentialbündel von S^2, 2 Punkte)

Wir betrachten S^2 als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass TS^2 nicht trivialisierbar ist, d.h. nicht diffeomorph zum trivialen Bündel $S^2 \times \mathbb{R}^2 \to S^2$ ist.

Hinweis: Satz vom Igel.

Aufgabe 1.5 (Möbiusband, 4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Möbiusband nicht orientierbar ist. (Rigoroser Beweis!)

Hinweis: Sie können die Parametrisierung aus der Übung verwenden.