Prof. Dr. J. Lohkamp
T. Nguyen
Dr. D. Skodlerack WS 13

2. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Montag, den 04.11.2013, 10:15 im Zettelkasten 19 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Riemannsche Metriken, Immersion, Tangentialbündel, glatte Abbildungen

Aufgabe 2.1 (Kurve im $\mathbb{R}^2$, 4 Punkte)

Betrachten Sie die reelle Gerade mit der folgenden Riemannschen Metrik.

$$g_x(v,w) = (1+\sin^2(x))vw, v, w \in T_x\mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Geben Sie eine abgeschlossene isometrische Einbettung von $(\mathbb{R}, g)$ nach $(\mathbb{R}^2, \langle,\rangle_2)$ an.

Aufgabe 2.2 ($\mathbb{R}^2$ mit endlichem Volumen, 4 Punkte)

Gibt es auf $\mathbb{R}^2$ eine Riemannsche Metrik g, so dass $\mathrm{vol}_g(\mathbb{R}^2) = 1$ gilt? Wenn ja, geben Sie eine an, andernfalls beweisen Sie, dass es keine solche Metrik gibt.

Aufgabe 2.3 (lokale Basis, 4 Punkte)

Es seien M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ($n \geq 2$), (ϕ, U) eine zulässige Karte von M um $p \in M$ und

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

die zugehörige lokale Basis.

i) Zeigen sie, dass es keine zulässige Karte (ψ, V) um p gibt, so dass die zugehörige lokale Basis lokal um p die Form

$$e^{-\phi_1(x)}\frac{\partial}{\partial x_1}(x), -\frac{\partial}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x), \frac{\partial}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n},$$

hat.

ii) Es sei X ein glattes Vektorfeld auf U, das nirgends verschwindet. Zeigen Sie, dass man X lokal um p zu einer lokalen Basis erweitern kann.

Aufgabe 2.4 (Mannigfaltigkeiten orthogonal zu einem Vektor, 6 Punkte)

i) Es seien M eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, p ein Punkt auf M und $v \neq 0$ ein Tangentialvektor von M an p, d.h. $v \in T_pM$. Dann existert eine offene Umgebung U von p und eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit N von U, sodass der Tangentialraum T_pN orthogonal zu v ist.
Hinweis: Flüsse.

ii) Finden sie die zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ durch $(1,0,0)$, die orthogonal zum Vektorfeld

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto X(x,y,z) := (2x, y, \frac{2}{3}z)$$

ist.

Aufgabe 2.5*($P_2(\mathbb{R})$ als Untermannigfaltigkeit, 4 Punkte)

Finden Sie für mindestens eine natürliche Zahl n eine abgeschlossene Einbettung

$$P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 2.6*(Mannigfaltigkeiten orthogonal zu einem Vektorfeld, 6 Punkte)

Es sei M eine 3-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und X ein Vektorfeld auf M, dass nirgends verschwindet.

i) Zeigen Sie, dass
$$TM^{\perp X} := \bigcup_{p \in M} T_pM^{\perp X(p)}$$
eine Untermannigfaltigkeit von TM ist.

ii) Es sei $TM^{\perp}$ abgeschlossen unter der Lie-Klammer, d.h. für alle zu X orthogonalen Vektorfelder Y und Z ist $[Y, Z]$ orthogonal zu X. Zeigen Sie, dass genau eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M existiert die durch p geht, und dessen Tangentialbündel orthogonal zu X ist, d.h.
$$X(q) \perp T_qN, \ \forall q \in N.$$

Die Sternaufgaben sind freiwillig.