Prof. Dr. J. Lohkamp
T. Nguyen
Dr. D. Skodlerack WS 13

3. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Montag, den 11.11.2013, 10:15 im Zettelkasten 19 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Lie-Klammer, Parallelverschiebung, Levi-Civita Zusammenhang, Wenn nichts weiter erwähnt wird betrachten wir immer die entsprechende induzierte Riemannsche Metrik mit dem zugehörigen Levi-Civita Zusammenhang.

Aufgabe 3.1 (Parallelverschiebung auf S^2, 4 Punkte)

Es sei p ein Punkt auf S^2 und $v \in T_pS^2$. Es sei weiterhin α ein Element von $[0, 2\pi)$

i) Zeigen Sie, dass eine stückweise glatte geschlossene Kurve γ mit Start und Ziel in p existiert, so dass der Winkel zwischen v und der Parallelverschiebung $P_\gamma^\nabla(v)$ entlang γ gleich α ist.

ii) Kann man die Kurve γ auch glatt wählen.

Aufgabe 3.2 (Hyperbolischer Paraboloid, 4 + 2 + 2 Punkte)

Gegeben sei die Untermannigfaltigkeit

$$M := \{(x, y, z)|\ z + x^2 - y^2 = 0\}$$

von $\mathbb{R}^3$ und ein Vektorfeld X durch:

$$X((x, y, z)) := (1, 0, -2x)$$

i) Verschieben sie den Vektor $v := (1, 1, 0) \in T_{(1,1,0)}M$ entlang des Vektorfeldes X zum Punkt $(-1, 1, 0)$.

ii) Finden Sie eine stückweise glatte Kurve γ von $(1, 1, 0)$ nach $(-1, 1, 0)$, so dass die Parallelverschiebung
$$P_\gamma^\nabla : T_{(1,1,0)}M \to T_{(-1,1,0)}M$$
v nach $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ abbildet.

iii) Betrachten sie die Karte (ϕ, M) gegeben durch
$$\phi(x, y, z) := (x, y).$$
Berechnen Sie die Christoffel-Symbole bezüglich (ϕ, M).

Hinweis: Machen Sie sich von der Aufgabenstellung graphisch ein Bild.

Aufgabe 3.3 (Parallelverschiebung und Isometrien, 2 Punkte)

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang auf M. Desweiteren sei γ eine stückweise glatte Kurve auf M von p nach q. Zeigen Sie, dass die Parallelverschiebung
$$P_\gamma^\nabla : T_pM \to T_qM$$
eine Isometrie ist.

Aufgabe 3.4 (Lie-Klammer unter glatten Abbildungen, 4 Punkte)

Es sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung und es seien X_1, X_2 glatte Vektorfelder auf M die durch F mit glatten Vektorfeldern Y_1, Y_2 auf N verknüpft sind, d.h.

$$Y_i(F(x)) = dF_x(X_i(x)),\ x \in M,\ i = 1, 2.$$

Zeigen Sie, dass F die Lie-Klammer erhält, d.h.

$$[Y_1, Y_2](F(x)) = dF_x([X_1, X_2](x)),\ x \in M.$$

Aufgabe 3.5*(Flachheit des Einheitszylinders, 4 Punkte)

Es seien p, q zwei Punkte auf dem Einheitszylinder Z und v ein Tangentialvektor von Z in p. Zeigen Sie, dass die Parallelverschiebung von v nach T_qZ unabhängig von der Wahl der stückweise glatten Kurve ist.

Die Sternaufgaben sind freiwillig.