Prof. Dr. J. Lohkamp
T. Nguyen
Dr. D. Skodlerack

WS 13

4. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Montag, den 18.11.2013, 10:15 im Zettelkasten 19 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Levi-Civita-Zusammenhang, Poincaré-Halbebene

Aufgabe 4.1 (Dünne asymptotische Dreiecke, 2+2+1+3 Punkte)

Wir betrachten die Poincaré-Halbebene, d.h. $H^+ := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}$ mit der Riemannschen Metrik

$$g_{H^+} = \frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy).$$

i) Die Gruppe der regulären 2×2-Matrizen mit positiver Determinante $GL_2(\mathbb{R})_+$ wirkt via

$$A.z := \frac{az+b}{cz+d}, \; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z = x + iy \in H,$$

auf H. Zeigen sie, dass

$$z \mapsto A.z$$

eine Isometrie ist, d.h. ein C^∞-Diffeomorphismus, der die Riemannsche Metrik erhält.

ii) Finden Sie, bis auf Reparametrisierung alle Geodäten von H^+. Sie können verwenden, dass $t \mapsto ie^t$ eine Geodäte ist.

iii) Zeigen Sie, dass für eine Geodäte γ von H^+ der euklidische Grenzwert für $t \to \infty$ in $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \{\infty\}$ liegt. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $g(\infty)$.

iv) Wir nennen drei Geodäten γ_1, γ_2 und γ_3 mit $\gamma_1(-\infty) = \gamma_2(-\infty),\; \gamma_2(\infty) = \gamma_3(-\infty)$ und $\gamma_1(\infty) = \gamma_3(\infty)$ ein asymptotisches Dreieck von H^+. Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle asymptotischen Dreiecke $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ das Bild von γ_1 in der Vereinigung der δ-Umgebungen (bezüglich g_{H^+}) von den Bildern von γ_2 und γ_3 liegt. Hierbei dürfen Sie verwenden, dass der Abstand zwischen zwei Punkten $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ durch

$$\rho_g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}{2y_1y_2}\right)$$

gegeben ist.

Aufgabe 4.2 (Exponentialabbildung, 4+1* Punkte)

Finden Sie auf $\mathbb{R}^{>0}$ mit der Karte $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{>0}}, \mathbb{R}^{>0})$ eine Riemannsche Metrik, für die die Exponentialabbildung im Punkt 1, d.h. die Abbildung

$$\exp_1 : T_1(\mathbb{R}^{>0}) \to \mathbb{R}^{>0},$$

die Form

$$\exp_1(t\frac{\partial}{\partial x}(1)) = e^t$$

hat. Gibt es mehr als eine solche Riemannsche Metrik?

Aufgabe 4.3 (Bestimmung von geodätischen Flüssen, 4 Punkte)

Es sei X ein nirgends verschwindendes glattes Vektorfeld auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) mit Levi-Civita Zusammenhang ∇, so dass $\nabla_{X(x)} X \in \mathbb{R}X(x)$ für alle $x \in M$ gilt. Zeigen Sie, dass der Fluss zu $Y(x) := \frac{1}{||X(x)||_g} X(x)$ geodätisch ist.

Hinweis: Es gilt die Kettenregel $X(f \circ h)(x) = df_{h(x)}(X(h)(x))$.

Aufgabe 4.4*(Isometrische Parallelverschiebung bestimmt den Levi-Civita-Zusammenhang, 6 Punkte)

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang. Desweiteren seien X und Y glatte Vektorfelder auf M, x ein Punkt auf M und γ die Integralkurve von X durch x. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}\left(P^{\nabla}_{\gamma|_{[0,t]}}(Y(\gamma(t)))\right)|_{t=0} = \nabla_{X(x)} Y$$

gilt.

Aufgabe 4.5*(Neue kovariante Ableitung, 4 Punkte)

Finden Sie auf dem Einheitszylinder mit induzierter Riemannscher Metrik eine torsonsfreie kovariante Ableitung, die nicht mit dem Levi-Civita-Zusammenhang übereinstimmt, so dass die Kreise parallel zur x-y-Ebene immernoch Bilder von Geodäten sind.