Prof. Dr. J. Lohkamp
T. Nguyen
Dr. D. Skodlerack

WS 13

5. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Montag, den 25.11.2013, 10:15 im Zettelkasten 19 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Geodäten, Exponentialabbildung, Krümmungstensor

Aufgabe 5.1 (Isometrie, 2 Punkte)

Eine Geodäte $\gamma : I \to M$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) heißt normalisiert, falls für alle $t \in I$ die Ableitung $\gamma'(t)$ ein Einheitsvektor ist. Es sei f eine C^∞-Abbildung zwischen zwei Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die normalisierte Geodäten, auf normalisierte Geodäten abbildet. Zeigen sie, dass f isometrisch ist.

Aufgabe 5.2 (Kreise im Rotationsparaboloiden, 3 Punkte)

Sind die zur x-y-Ebene parallelen Kreise im Rotationparaboloiden im $\mathbb{R}^3$ Bilder von Geodäten? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5.3 (Exponentialfunktion zu einer Sphäre, 4 Punkte)

Es seien n eine natürliche Zahl und r eine positive reelle Zahl. Berechnen sie die Exponentialfunktion der n-Sphäre mit Radius r am Nordpol.

Aufgabe 5.4 (1. Bianchi-Identität, 4 Punkte)

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigflatigkeit. Die Abbildung $\mathcal{R} : \mathfrak{X}(M)^4 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, U) := g(\mathcal{R}^\nabla(X, Y)Z, U),$$

heißt Krümmungstensor von (M, g). Zeigen Sie, dass für alle glatten Vektorfelder X, Y, Z, U die folgende Gleichung gilt.

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, U) + \mathcal{R}(Z, X, Y, U) + \mathcal{R}(Y, Z, X, U) = 0.$$

Aufgabe 5.5 (Flachheitskriterium, 4*+4 Punkte)

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt flach, wenn der Krümmungstensor für alle Quadrupel glatter Vektorfelder überall verschwindet.

i) Zeigen Sie, dass eine Riemannsche Mannigfaltigkeit flach ist, wenn für alle Punkte p und q auf M die Parallelverschiebung von p nach q unabhängig von der Wahl der stückweise glatten Kurve ist.
ii) Gilt die Umkehrung?

Hinweis: Aufgabe 4.4.

Aufgabe 5.6*(Prägeodäten, 2+4 Punkte)

Es (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ und $\phi : I \to M$ eine glatte Kurve auf M.

i) Zeigen Sie, dass jede glatte Abbildung $\tau : J \to I$ zwischen zwei Intervallen J und I die Gleichung

$$(\nabla_{\phi\circ\tau}(\phi\circ\tau)')(t) = \tau'(t)^2(\nabla_\phi\phi')(\tau(t)) + \tau''(t)\phi'(\tau(t)),\ t \in J,$$

erfüllt.

ii) Es sei nun s_0 ein innerer Punkt von I und $\phi'(s_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

a) Es existiert ein $\epsilon > 0$ und eine injektive glatte Abbildung $\tau : (-\epsilon, \epsilon) \to I$ mit $\tau(0) = s_0$, so dass $\phi\circ\tau$ eine Geodäte ist.

b) Es gilt $(\nabla_\phi\phi')(s) \in \mathbb{R}\phi'(s)$ lokal um s_0.

Aufgabe 5.7*(warped product, 4 + 1 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^2, g)$ mit

$$g = \frac{1}{e^{2y}}dx\otimes dx + dy\otimes dy$$

isometrisch zur Poincaré Halbebene ist. Siehe dazu Aufgabe 4.1. Zeichnen Sie die Bilder der Geodäten.

Die Sternaufgaben sind freiwillig.