Prof. Dr. J. Lohkamp
T. Nguyen
Dr. D. Skodlerack

WS 13

6. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Montag, den 02.12.2013, 10:15 im Zettelkasten 19 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Krümmungstensor

Aufgabe 6.1 (Schnittkrümmung, 4 Punkte)

Es seien (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension größer gleich 2, p ein Punkt aus M, E ein zwei-dimensionaler Untervektorraum von T_pM und $\{v_1, v_2\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von E. Die Schnittkrümmung von M in p entlang E ist definiert durch

$$K(p, E) := \frac{R_p(v_1, v_2, v_2, v_1)}{(g_p(v_1, v_1)g_p(v_2, v_2) - g_p(v_1, v_2)^2)}.$$

Zeigen Sie, dass $K(p, E)$ wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Wahl der Basis abhängt.

Bemerkung: Wenn M zwei-dimensional ist, so nennt man $K(p) := K(p, T_pM)$ die Gaußkrümmung im Punkt p.

Aufgabe 6.2 (Krümmungstensoren, 4+1 Punkte)

Bestimmen Sie den Krümmungstensor

i) der Poincaré-Halbebene (H_+, g_{H_+}). Hat diese eine konstante Gaußkrümmung, d.h. $K(p) = K(q)$ für alle $p, q \in H_+$? Wenn ja, welche?
ii) des zwei-dimensionalen Einheitszylinders ,

Aufgabe 6.3 (Gaußkrümmung im hyperbolischen Paraboloiden, 4 Punkte)

Wir betrachten

$$M := \{(x, y, z)|\ z + x^2 - y^2 = 0\}$$

mit der von $\mathbb{R}^3$ induzierten Riemannschen Metrik. Berechnen Sie die Menge der Punkte von M mit Gaußkrümmung -1.

Aufgabe 6.4 (Gaußkrümmung von $S^2(r)$, 4+2 Punkte)

i) Es sei $f : B_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Abbildung mit $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Gaußkrümmung von

$$M := \{(x, y, z) \in B_\delta(x_0) \times \mathbb{R} \mid f(x, y) = z\}$$

im Punkt $f(x_0)$ mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0))^2$$

übereinstimmt.

ii) Berechnen Sie für $r > 0$ die Gaußkrümmung von $S^2(r)$ im Punkt $(r, 0, 0)$.

Aufgabe 6.5*(Krümmungstensor und Schnittkrümmungen, 4 Punkte)

Es seien (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension größer gleich 2, p ein Punkt auf M und $x, y, v, w \in T_pM$. Stellen Sie $R_p(x, y, v, w)$ mit Schnittkrümmungen und der Riemannschen Metrik dar.

Hinweis: Nutzen Sie NICHT Aufgabe 6.6*.

Aufgabe 6.6*(Gleichheit von 4-Linearformen, 4 Punkte)

Es seien $B, \tilde{B} : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ zwei 4-Linearformen, die schiefsymmetrisch bezüglich der Permutation $\langle 1, 2\rangle$ und symmetrisch bezüglich $\langle 1, 3\rangle \circ \langle 2, 4\rangle$ sind, und die 1. Bianchi-Identität erfüllen. Zeigen Sie, dass B und $\tilde{B}$ genau dann gleich sind, wenn sie in allen Quadrupeln (v, w, w, v), $v, w \in V$, übereinstimmen.

Aufgabe 6.7*(negative konstante Schnittkrümmung, 2 Punkte)

Es sei K_0 eine negative reelle Zahl. Geben Sie eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit konstanter Schnittkrümmung K_0 an.

Die Sternaufgaben sind freiwillig.