Prof. Dr. J. Lohkamp
T. Nguyen
Dr. D. Skodlerack

WS 2012/13

Lösungen zum Aufgabenblatt 7 „Differentialgeometrie I“

Zu Aufgabe 7.1

Ohne Einschränkung sei $x_0 = (0,0)$. Betrachten Sie die Ebene E_v zusammen mit der Kurve

$$\tilde{\gamma}: \ (-\epsilon, \epsilon) \to M \cap E_v, \tilde{\gamma}(t) := (tv, f(tv)).$$

Es sei γ die Parametriesierung von $\tilde{\gamma}$ nach der Bogenlänge mit $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0) = (0,0,f(0,0))$. Es gilt:

$$\tan(\phi(s)) = \frac{d\gamma_3}{ds}(s) = \frac{d\tilde{\gamma}_3}{dt}(t(s))\frac{dt}{ds}(s)$$

und deshalb folgt für die Ableitung an der Stelle 0:

$$\begin{aligned}
\phi'(0) &= \frac{d^2\tilde{\gamma}_3}{dt^2}(t(0))(\frac{dt}{ds}(0))^2 + \frac{d\tilde{\gamma}_3}{dt}(t(0))(\frac{d^2t}{ds^2}(0)) \\
&= \frac{d^2\tilde{\gamma}_3}{dt^2}(t(0)) \\
&= vH_f(0,0)v^T
\end{aligned}$$

wobei H_f die Hesse-Matrix von f ist. Es wurden bei den Gleichungen $t(0) = 0 = \frac{d\tilde{\gamma}_3}{dt}(0)$ und

$$\frac{dt}{ds}(0) = \frac{1}{|\tilde{\gamma}'(0)|_2} = 1$$

verwendet. Wir variieren nun v. Man sieht nun leicht, dass das Minimum und das Maximum von Ψ in den Vektoren einer ON-Basis von $\mathbb{R}^2$, die $H_f(0,0)$ diagonalisiert, angenommen wird. Die Verwendung der Determinante ergibt die Behauptung.

Zu Aufgabe 7.2

Man wähle eine lokale Basis $\frac{\partial}{\partial x_i}$ um $p = f(s_0, t_0)$ und wir schreiben f_i für $x_i \circ f$. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i} \circ f,$$

und somit

$$\begin{aligned}
(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t})(s_0,t_0) &= \sum_i (\frac{\partial^2 f_i}{\partial s \partial t}(s_0,t_0)\frac{\partial}{\partial x_i}(f(s_0,t_0)) + \frac{\partial f_i}{\partial t}(s_0,t_0)\nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t_0)}\frac{\partial}{\partial x_i}) \\
&= \sum_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial s \partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}(f(s_0,t_0)) + \sum_i \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial t}\frac{\partial f_j}{\partial s}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}(f(s_0,t_0))}\frac{\partial}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

Wir wenden den Satz von Schwarz auf die f_i an, rechnen $(\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s})(s_0,t_0)$ analog aus und erhalten die Behauptung.

Zu Aufgabe 7.3

Wir definieren $\alpha(s,t) := \exp_{c(s)}(t(V + sW)),\ s \in (-\epsilon, \epsilon),\ t \in [0, t_0]$, wobei

- c eine glatte Kurve durch p $(= c(0))$ ist mit $c'(0) = J(0)$ und
- W, V parallele Vektorfelder entlang c mit $V(0) = \gamma'(0)$ und $W(0) = J'(0)$ ist.

Dann gelten $\frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,0) = c'(0) = J(0)$ und

$$\begin{aligned}
(\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial s})(0,0) &= (\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial\alpha}{\partial t})(0,0) \\
&= \frac{\nabla}{ds}\Big((s,t) \mapsto d(\exp_{c(s)})_{t(V(s)+sW(s))}(V(s)+sW(s))\Big)(0,0) \\
&= \nabla_c\Big(s \mapsto d(\exp_{c(s)})_0(V(s)+sW(s))\Big)(0) \\
&= \nabla_c(V(s)+sW(s))(0) \\
&= J'(0),
\end{aligned}$$

wobei bei der letzten Gleichung die Leibniz-Regel angewandt wurde. Aus der Eindeutigkeit der Lösung der zugehörigen Differentialgleichung folgt $\frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t) = J(t)$ auf $[0, t_0]$.

Zu Aufgabe 7.4

Es sei J ein Jacobifeld entlang einer normalisierten Geodäte $\gamma : [0,b] \to M$, das in 0 und b verschwindet. Dann ist $g(J', J)$ monoton wachsend, da auf $[0,b]$ die Ungleichung

$$(g(J',J))'(t) = g_{\gamma(t)}(J''(t), J(t)) + g_{\gamma(t)}(J'(t), J'(t)) \geq R_{\gamma(t)}(\gamma'(t), J(t), \gamma'(t), J(t)) \geq 0$$

gilt. Aus $g(J'(0), J(0)) = 0$ folgt nun, dass $g(J', J)$ auf ganz $[0,b]$ nicht negativ ist. Also ist $g(J,J)$ monoton wachsend. Da aber $g(J,J)$ an den Rändern Null ist, muss J auf dem ganzen Intervall $[0,b]$ verschwinden.

Zu Aufgabe 7.5

Wir bezeichnen mit $L(\sigma)$ die Länge einer Kurve σ. Wir müssen nur zeigen, dass γ um jede Stelle herum eine Geodäte ist, also kann man ohne Einschränkung annehmen, dass das Bild von γ in einer normalen Kugel mit Zentrum in $\gamma(a)$ liegt. Dann gibt es eine minimierende Geodäte

$$\tilde{\gamma} : [a,b] \to M,$$

von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Dann folgt

$$E(\tilde{\gamma}) = \frac{L(\tilde{\gamma})^2}{b-a} \leq \frac{L(\gamma)^2}{b-a} \leq E(\gamma). \tag{1}$$

In der letzten Ungleichung wurde die Höldersche Ungleichung $L(\gamma) \leq \sqrt{b-a}\sqrt{E(\gamma)}$ verwendet. Die Minimalität von $E(\gamma)$ impliziert aber, dass in (1) nur Gleichungen auftreten. Also tritt auch in der Hölderschen Ungleichung eine Gleichung auf, d.h. dass γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Die Gleichung in (1) zeigt auch, dass γ den Abstand zwischen den Endpunkten realisiert. Also ist γ eine Geodäte. Man kann sogar ohne obige Annahme zeigen, dass γ minimierend ist. (Siehe Übung.)

Zu Aufgabe 7.6

Zuerst ermitteln wir die Variationsformel zur notwendigen Bedingung der Minimierung der

Energie. Es sei α eine glatte Variation von γ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
E'(s) &= \left(\int_a^b \left|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right|_g^2 dt\right)' \\
&= 2\int_a^b g\left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) dt \\
&= 2\int_a^b g\left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) dt. \\
&= 2\int_a^b \frac{d}{dt}\left(g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\right) - g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) dt. \\
&= 2\left[g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\right]_a^b - 2\int_a^b g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) dt.
\end{aligned}$$

Also gilt genau dann $E'(0) = 0$ für alle echten glatten Variationen von γ, wenn für alle an den Rändern verschwindenen glatten Vektorfelder V entlang γ

$$\int_a^b g_{\gamma(t)}\left(V(t), (\nabla_\gamma \gamma')(t)\right) dt = 0 \tag{2}$$

gilt. Echt heißt hier $\alpha(s,a) = \gamma(a)$ und $\alpha(s,b) = \gamma(b)$ für alle s. Damit ist die erste Richtung der Aufgabe gezeigt. Die Rückrichtung erhält man indem man $V(t) := \sin(\frac{(t-a)\pi}{b-a})(\nabla_\gamma\gamma')(t),\ t \in [a,b]$, in (2) einsetzt.

Zu Aufgabe 7.7

Lösung der Studenten: Der Zylinder.