Prof. Dr. J. Lohkamp
T. Nguyen
Dr. D. Skodlerack

WS 13

7. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Montag, den 09.12.2013, 10:15 im Zettelkasten 19 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Gaußkrümmung, Jacobifelder, Variationsfelder

Aufgabe 7.1 (Geometrische Interpretation der Gaußkrümmung, 4 Punkte)

Es seien $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und $\phi(s)$ der Winkel von $\gamma'(0)$ zu $\gamma'(s)$ in positiver Drehrichtung. Der Wert $\phi'(0)$ heißt die (nicht intrinsische!) Krümmung von $\mathrm{im}(\gamma)$ in $\gamma(0)$. Diese bezeichnen wir hier mit $K^{\mathrm{im}(\gamma)\subseteq\mathbb{R}^2}(0)$.

Es sei nun $f : B_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Abbildung mit $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) = 0$. Wir betrachten weiter die Riemannsche Mannigfaltigkeit

$$M := \{(x, y, z) \in B_\delta(x_0) \times \mathbb{R} \mid f(x, y) = z\}$$

und die Abbildung

$$\Psi : S^1(1) \to \mathbb{R},\ v \mapsto K^{M\cap E_v\subseteq E_v}(x_0),$$

wobei E_v die Ebene ist, die durch $(0, 0, 1)^T$ und $(v_1, v_2, 0)^T$ aufgespannt wird. Zeigen Sie, dass für die Gaußkrümmung von M in x_0 die Gleichung

$$K(x_0) = \min(\Psi) \max(\Psi)$$

gilt.

Hinweis: Aufgabe 6.4.

Aufgabe 7.2 (Satz von Schwarz, 4 Punkte)

Es sei (M, g) seinen Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ und $f : U \to M$ eine glatte Abbildung, wobei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist. Desweiteren sei $W : U \to TM$ eine glatte Abbildung, die $W(s, t) \in T_{f(s,t)}M$ erfüllt. Dann sind Levi-Ableitungen $\frac{\nabla}{ds}W$ und $\frac{\nabla}{dt}W$ durch Levi-Ableitungen entlang Kurven wie folgt definiert.

$$(\frac{\nabla}{ds}W)(s_0, t_0) := (\nabla_{s\mapsto f(s,t_0)}W)(s_0, t_0)$$

und analog $(\frac{\nabla}{dt}W)(s_0, t_0)$.

Zeigen Sie, dass

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}$$

gilt.

Aufgabe 7.3 (Jacobifelder, 4 Punkte)

Es seien (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und γ eine Geodäte von $p = \gamma(0)$ nach $q = \gamma(t_0)$. Es sei J ein Jacobifeld von (M, g) entlang γ. Zeigen Sie, dass J ein Variationsvektorfeld einer Variation aus Geodäten ist.

Hinweis: An einer Stelle ist 7.2 sehr hilfreich.

Aufgabe 7.4 (Keine zueinander konjugierten Punkte, 4 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$, bei der alle Schnittkrümmungen nicht positiv sind, keine zueinander konjugierten Punkte besitzt.

Aufgabe 7.5*(Energie 1, 4 Punkte)

Es sei $\gamma : [a, b] \to M$ eine stückweise glatte Kurve auf (M, g). Man nennt

$$E(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|^2 \, dt$$

die Energie der Kurve γ. Zeigen Sie, dass γ eine Geodäte ist, wenn ihre Energie unter allen stückweise glatten Kurven σ auf $[a, b]$ von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ minimal ist.

Aufgabe 7.6*(Energie 2, 4 Punkte)

Es sei $\gamma : [a, b] \to M$ eine glatte Kurve auf (M, g).

eine glatte Variation von γ. Zeigen Sie, dass γ genau dann eine Geodäte ist, wenn für alle glatten Variationen

$$\alpha : \ (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to M, \ (s, t) \mapsto \alpha(s, t) =: \alpha_s(t)$$

von γ die Abbildung $s \mapsto E(\alpha_s)$ in 0 eine stationäre Stelle besitzt.

Aufgabe 7.7*(sich schneidende Geodäten, 4 Punkte)

Es seien M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, und γ, σ zwei vollständige Gedäten mit unterschiedlichen Bildern, die sich in mindestens zwei verschiedenen Punkten schneiden. Folgt daraus, dass die Schnittpunkte zueinander konjugiert sind? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die Sternaufgaben sind freiwillig.