Prof. Dr. J. Lohkamp
T. Nguyen
Dr. D. Skodlerack

WS 2012/13

Lösungen zum Aufgabenblatt 8 „Differentialgeometrie I“

Zu Aufgabe 8.1

Es gilt für

$$\alpha : [0,1] \times [0,b] \to M,\ \alpha(s,t) := \exp_{\gamma(t)}(sE(t)),$$

die Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(g(\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t})) &= g(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}) + g(\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial\alpha}{\partial t}) \\
&= g(\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial s}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g(\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial s})) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|(d\exp_{\gamma(t)})_{sE(t)}E(t)|^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|E(t)|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Da nun nach dem Gauss-Lemma $\frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t)$ zu $\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0,t)$ orthogonal ist, folgt nun aus obiger Gleichung, dass dies auch gilt, wenn man 0 durch ein beliebiges s ersetzt, insbesondere $s = 1$.

Zu Aufgabe 8.2

Betrachten Sie den Schnitt X von $S^2(1)$ mit $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \mathbb{R} \times [0,\infty)$. Dieser ist der auf kanonische Weise zu $Y_0 := (0, \frac{\pi}{3}) \times [0,\pi]$ diffeomorph, wobei $X \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ auf $(0, \frac{\pi}{3}) \times \{0,\pi\}$ abgebildet wird. Wir vererben die Riemannsche Metrik von X auf Y_0 und verschieben (Y_0, g) entlang der y Achse n mal:

$$Y_i := Y_0 + (0, i\pi).$$

Die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(Y := \cup Y_i, g)$ ist wohldefiniert, da die Verklebung schon in $S^2(1)$ realisiert wird, und der Punkt $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ ist zu genau n Punkten konjugiert, nämlich

$$(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} + i\pi),\ i = 1,\dots n.$$

Zu Aufgabe 8.3

zu i) Es sei J ein Jacobifeld entlang γ, dann gilt

$$\frac{d}{dt}(g(\nabla_\gamma J, \gamma') = g(\nabla_\gamma \nabla_\gamma J, \gamma') + g(\nabla_\gamma J, \nabla_\gamma \gamma') = R(\gamma', J, \gamma', \gamma') \equiv 0.$$

Also ist $\nabla_\gamma J$ genau dann überall zu γ' orthogonal, wenn dies in $t = 0$ der Fall ist. Weiter gilt

$$\frac{d}{dt}(g(J, \gamma')) = g(\nabla_\gamma J, \gamma'),$$

Also folgt mit obigem, dass J genau dann überall zu γ' orthogonal, wenn $J(0)$ und $(\nabla_\gamma J)(0)$ dies sind.

zu ii) Die Rückrichtung ist klar. Wir betrachten die andere Richtung. Es seien p ein Punkt von M, v und w zwei Tangentialvektoren in p und γ eine Geodäte die in p in Richtung w startet. Wir setzen v zueinem parallelen Vektorfeldern V entlang γ fort. V ist nach Voraussetzung ein Jacobifeld also gilt

$$R_p(w, v, w, v) = g_p((\nabla_\gamma \nabla_\gamma V)(0), w) = 0.$$

Also sind alle Schnittkrümmungen und somit der Krümmungstensor null.

Zu Aufgabe 8.4

Wir wählen Punkte $p \in M$ und $\bar{p} \in N$ und identifizieren beide Tangentialräume $T := T_pM = T_qN$, so dass $g_p^M = g_{\bar{p}}^N =: g_T$ gilt. Wir betrachten eine Kugel $B_r(0) \subseteq T$ auf der $\exp_p$ und $\exp_{\bar{p}}$ Diffeomorphismen sind. Wir zeigen, dass $\Phi := \exp_{\bar{p}} \circ \exp_p^{-1}|_{B_r(p)}$ eine Isometrie ist. Dazu fixieren wir einen Punkt $\tilde{v}$ aus $B_r(0) \setminus \{0\}$ und bezeichnen die Geodäte

$$t \mapsto \exp_p\left(\frac{t}{|\tilde{v}|}\tilde{v}\right), t \in [0, |\tilde{v}| =: b],$$

mit γ. Für einen Tangentialvektor $v \in T$ orthogonal zu $\tilde{v}$ bezeichne J_v das Jacobifeld entlang γ, das $J(0) = 0$ und $(\nabla_\gamma J)(0) = v$ erfüllt, und V die Parallelverschiebung von v entlang γ. Das Jacobifeld J_v hat nach der Vorlesung die Gestalt $J_v(t) = \lambda(t)V(t)$, wobei λ nur von K abhängt, also

$$(d\exp_p)_{\frac{t}{b}\tilde{v}}(tv) = J_v(t) = \lambda(t)V(t).$$

Es folgt deshalb aufgrund einer analogen Rechnung mit N statt M:

$$b^2 g^M_{\exp_p(\tilde{v})}((d\exp_p)_{\tilde{v}}(v), (d\exp_p)_{\tilde{v}}(w)) = \lambda(b)^2 g_T(v, w) = b^2 g^N_{\exp_{\bar{p}}(\tilde{v})}((d\exp_{\bar{p}})_{\tilde{v}}(v), (d\exp_{\bar{p}})_{\tilde{v}}(w)),$$

für alle $v, w \in \tilde{v}^\perp$. Dass die rechte und die linke Seite für beliebige v und w überinestimmen, folgt nun aus dem Gauß-Lemma, und Φ ist somit eine Isometrie.

Zu Aufgabe 8.5

Diese Aufgabe war wohl zu schwer für diese Vorlesung. Die naheliegende erste Idee, $\mathbb{R}^{\#G}/G$ mit $G \subseteq GL_{\#G}(\mathbb{R})$ zu betrachten funktioniert nicht. Es gilt folgender Satz: Es seien $\tilde{G}$ eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende Gruppe und G eine endliche Untergruppe von $\tilde{G}$, dann gilt für den topologischen Raum $X := \tilde{G}/G$, dass die Fundamentalgruppe isomorph zu G ist. Als $\tilde{G}$ könnte man in unserem Fall zum Beispiel $SU_{2\#G}(\mathbb{C})$ wählen.