Prof. Dr. J. Lohkamp
T. Nguyen
Dr. D. Skodlerack

8. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Montag, den 16.12.2013, 10:15 im Zettelkasten 19 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Exponentialabbildung, konstante Schnittkrümmung, Fundamentalgruppe

Aufgabe 8.1 (Erweiterte Version des Lemmas von Gauss, 4 Punkte)

Es seien $\gamma : [0,b] \to M$ eine Geodäte auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit und E eine paralleles Einheitsvektorfeld entlang γ, so dass für jedes t der Vektor $E(t)$ orthogonal zu $\gamma'(t)$ ist. Wir definieren eine neue Kurve durch

$$\tilde{\gamma}(t) := \exp_{\gamma(t)}(E(t)), t \in [0,b].$$

Zeigen Sie, dass sich für jedes t die Kurven $\tilde{\gamma}$ und

$$s \mapsto \exp_{\gamma(t)}(sE(t)), s \in (1-\epsilon, 1+\epsilon),$$

orthogonal schneiden.

Aufgabe 8.2 (Mehrere konjugierte Punkte, 4 Punkte)

Es sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Finden Sie eine Riemannsche Mannigfaltigkeit auf der es einen Punkt p gibt, so dass genau n Punkte zu p konjugiert sind.

Aufgabe 8.3 (Jacobifelder, 2+2 Punkte)

Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

i) Ein Jacobifeld J entlang einer Geodäte γ ist genau dann überall orthogonal zu γ, wenn $J(0)$ und $(\nabla_\gamma J)(0)$ orthogonal zu $\gamma'(0)$ sind.
ii) Es sind genau dann alle parallelen Vektorfelder entlang von Geodäten Jacobifelder, wenn M flach ist.

Aufgabe 8.4 (konstante Schnittkrümmung, 4 Punkte)

Es seien M und N zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension ≥ 2 mit konstanter Schnittkrümmung K. Zeigen Sie, dass M und N lokal isometrisch ist.

Aufgabe 8.5*(Fundamentalgruppe, 4 Punkte)

Zeigen Sie, dass es zu jeder endlichen Gruppe G eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit M gibt, so dass $G = \pi_1(M)$ ist.