Prof. Dr. J. Lohkamp
T. Nguyen
Dr. D. Skodlerack

WS 2012/13

Lösungen zum Aufgabenblatt 8 „Differentialgeometrie I“

Zu Aufgabe 8.1[9.7*] Ausführungen zum Satz von Weinstein.

zu i) a-c) Die Punkte a) bis c) wurden in der Übung vorgemacht und sind nichts anderes als eine Anwendung von Elementargeometrie und ein bisschen lineare Algebra. Es sei $\gamma: [0, b] \to N$ die minimierende Geodäte von p nach $f(p)$, wobei p so gewählt wurde, dass der Abstand von p nach $f(p)$ minimal unter allen solchen Abständen ist.

d) Es sei v ein normierter zu $\gamma'(0)$ orhtogonaler Eigenvektor von A zum Eigenwert 1. Wir setzen v entlang γ parallel zu einem Vektorfeld V fort und betrachten folgende Variation von γ:

$$\alpha(t, s) := \exp_{\gamma(t)}(sV(t)), t \in [0, b], s \in \mathbb{R},$$

und die Längenabbildung $s \mapsto l(\alpha_s)$. Das Variationsvektorfeld von α ist V, und wir setzen V durch

$$V(t, s) := \frac{\partial \alpha}{\partial s}(t, s)$$

auf den Definitionsbereich von α fort. Da γ eine Geodäte ist, ist $L'(0) = 0$. Für die zweite Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} L''(0) &= I_\gamma(V, V) + [g(\frac{\nabla}{ds}V, \gamma')]_0^b - \int_0^b \left(\frac{d(g(V(t, 0), \gamma'(t)))}{dt} \right)^2 dt \\ &= I_\gamma(V, V). \end{aligned}$$

Die Gleicheit kommt wie folgt zustande:

- Der letzte Term ist Null, da $V(t, 0)$ orthogonal zu $\gamma'(t)$ ist.
- der mittlere Term ist Null, da $\alpha(*, 0)$ und $\alpha(*, b)$ Geodäten sind. Genauer ist $\alpha(b, s) = f(\alpha(0, s))$, denn

$$\begin{aligned} \alpha(b, s) &= \exp_{\gamma(b)}(sV(b)) \\ &= \exp_{f(b)}(sdf_p(v)) \\ &= f(\exp_p(sv)) \\ &= \alpha(0, s). \end{aligned}$$

Für $I_\gamma(V, V)$ erhält man:

$$\begin{aligned} I_\gamma(V, V) &= \int_0^b g(\nabla_\gamma V, \nabla_\gamma V) + R(V, \gamma', V, \gamma')dt \\ &= -\int_0^b R(\gamma', V, V, \gamma')dt \\ &\leq -Kb \end{aligned}$$

wobei K eine positive untere Schranke für die Schnittkrümmung ist. Also ist $L''(0) < 0$ und somit gibt es ein $s_0 > 0$, so dass α_{s_0} kürzer als γ ist. Nun ist $f(\alpha_{s_0}(0) = \alpha_{s_0}(b)$, womit sich ein Widerspruch zur Minimalität des Abstandes von p zu $f(p)$ ergibt.

zu ii) Das Argument mit dem Übergang zu $N \times N$ funktioniert nicht, da $N \times N$ nicht positive Schnittkrümmung hat. Hier ist wohl das einfachste, auf die Analogie des Beweises hinzuweisen. Es gibt nur für c) eine kleine Änderung.