Prof. Dr. J. Lohkamp
T. Nguyen
Dr. D. Skodlerack WS 13

9. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Montag, den 06.01.2013, 10:15 im Zettelkasten 19 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Indexform, zweite Fundamentalform, Myers-Bonnet. In dieser Serie seien (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension ≥ 2 und

$$\gamma : [a, b] \to M$$

eine normalisierte Geodäte mit Indexform I.

Aufgabe 9.1 (Indexform bei konstanter Schnittkrümmung, 4 Punkte)

Es habe M konstante Schnittkrümmung K. Berechnen Sie die Indexform von γ.

Hinweis: Stellen Sie ein Vektorfeld entlang γ durch eine ON-Basis paralleler Vektorfelder dar.

Aufgabe 9.2 (flacher Torus und zweite Fundamentalform, 3+3 Punkte)

Es seien $(M_i, g_i), i = 1, 2$ zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $g = g_1 + g_2$ die Produktmetrik auf $M := M_1 \times M_2$.

i) Fixieren Sie einen Punkt $p = (p_1, p_2)$ aus M und eine lineare Ebene von T_pM, so dass E sowohl $T_{p_1}M_1$ als auch $T_{p_2}M_2$ nichttrivial schneidet. Zeigen sie $K(p, E) = 0$.

ii) Finden sie einen flachen Torus in $S^2(1) \times S^2(1)$.

Aufgabe 9.3 (lokale Isometrien, 4 Punkte)

Es seien $f, h : M \to N$ zwei Isometrien zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass beide Abbildungen gleich sind, wenn ein $p \in M$ existiert, so dass $f(p) = h(p)$ und $df_p = dh_p$ gelten.

Hinweis: A priori sind in unserer Vorlesung alle Riemannsche Mannigfaltigkeiten zusammenhängend.

Aufgabe 9.4 (Vergleich von Schnittkrümmungen mit zweiter Fundamentalform, 4+1 Punkte)

Es seien N eine Untermannigfaltigkeit von M der Dimension grösser eins, p ein Punkt von N, E eine lineare Ebene in T_pN und u, v, eine ON-Basis von E.

i) Zeigen sie, dass

$$K(p, E, N) - K(p, E, M) = g_p(S(u, u), S(v, v)) - |S(u, v)|^2$$

gilt.

ii) Es sei nun zusätzlich $\dim(N) = \dim(M) - 1$ und η ein Einheitsnormalenvektor in p. Zeigen sie, dass

$$K(p, E, N) - K(p, E, M) = S_\eta(u, u)S_\eta(v, v) - S_\eta(u, v)^2$$

ist, wobei S_η via

$$S_\eta(\tilde{u}, \tilde{v}) := g_p(S(\tilde{u}, \tilde{v}), \eta)$$

definiert ist.

Aufgabe 9.5*(Variante von Myers-Bonnet, 4 Punkte)

Es sei g eine vollständige Metrik auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{r\to\infty}\Big(\inf_{x^2+y^2\geq r^2} K(x,y)\Big) \leq 0$$

gilt. Hierbei ist $K(x,y)$ die Gaußkrümmung im Punkt (x,y).

Aufgabe 9.6*(in einer Umgebung minimierende Geodäten, 2+6+3 Punkte)

Man sagt, dass γ *lokal um sich selbst minimierend* ist, falls eine offene Teilmenge U existiert, die $\mathrm{im}(\gamma)$ enthält, so dass γ auf (U,g) minimierend ist, und *lokal um sich selbst streng minimierend*, falls man U sogar so wählen kann, dass γ die Länge dort streng minimiert. Zeigen Sie:

i) Wenn ein stückweise glattes Vektorfeld V entlang γ existiert, das in p und q verschwindet, so dass $I(V,V)$ negativ ist, dann ist γ nicht lokal um sich selbst minimierend.

ii) Es sei γ injektiv. Zeigen Sie, dass γ lokal um sich selbst streng minimierend ist, wenn die Indexform positiv definit ist.

iii) Es sei nun γ nicht injektiv. Gilt die Aussage (ii) immernoch?

Aufgabe 9.7*(Satz von Weinstein, 8+2 Punkte)

Es seien N eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit positiver Schnittkrümmung und f eine Isometrie von N. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat,

i) wenn $\dim(N)$ gerade ist, und f die Orientierung erhält. Nehmen Sie dazu an, dass f keinen Fixpunkt hat, und zeigen Sie:

   a) Es sei p ein Punkt auf N, so dass der Abstand von p nach $f(p)$ minimal ist. Dann gibt es eine vollständige normalisierte Geodäte γ durch $p, f(p), f(f(p)), \ldots$ mit $\gamma(0) = p$, die von p nach $f(p)$ minimierend ist.

   b) Der Tangentialvektor von γ in p ist ein Eigenvektor von der Abbildung

   $$A := (P_\gamma^\nabla)^{-1} \circ df_p : T_pM \to T_pM$$

   zum Eigenwert 1.

   c) Der Eigenraum von A zum Eigenwert 1 ist mindestens zweidimensional.

   d) Finden Sie ein glattes Vektorfeld W entlang γ von p nach $f(p)$, dass in p und $f(p)$ verschwindet, so dass die Indexform in (W,W) negativ ist. Folgern Sie den Widerspruch.

ii) wenn $\dim(N)$ ungerade ist, und f die Orientierung umkehrt.

Die Sternaufgaben sind freiwillig. Frohe Weihnachten.