Prof. Dr. J. Lohkamp
T. Nguyen
Dr. D. Skodlerack

WS 13

10. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Montag, den 13.01.2014, 10:15 im Zettelkasten 19 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Divergenz, Lemma von Schur, Hauptkrümmung, Riccikrümmung, Skalarkrümmung

Aufgabe 10.1 (Hauptkrümmungen, 3+3+2 Punkte)

Betrachten sie die drei-dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$M := \{(x_1, x_2, x_3, x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3) | \ x_i \in \mathbb{R}\}$$

von $\mathbb{R}^4$.

i) Berechnen Sie die Hauptkrümmungen und die Skalarkrümmung im Nullpunkt.
ii) Berechnen Sie die Riccikrümmung im Nullpunkt in Richtung e_1.
iii) Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung. Berechnen Sie die Riccikrümmung und die Skalarkrümmung in jedem Punkt.

Aufgabe 10.2*(Divergenz, 2 Punkte)

Es seien B ein $(0, r)$-Tensor ($r \geq 1$) auf eine Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Die Divergenz von B ist die Abbildung

$$\delta B : \mathfrak{X}(M)^{r-1} \to C^\infty(M),$$

die durch

$$(\delta B)(X_1, \ldots, X_{r-1})(p) := -\sum_i (\nabla_{e_i} B)(e_i, X_1(p), \ldots, X_{r-1}(p))$$

definiert ist, wobei (e_i) eine beliebige ON-Basis von T_pM ist. Dies definiert einen wohldefinierten $(0, r-1)$-Tensor ist. Das müssen Sie hier nicht beweisen.

Es sei X ein glattes Vektorfeld auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M, dann ordnet man X den $(0, 1)$-Tensor

$$\omega_X(Y) := g(X, Y)$$

zu und bezeichnet

$$\operatorname{div}(X) := -\delta\omega_X$$

die Divergenz von X. Berechnen Sie $\operatorname{div}(X)$ in Termen der kovarianten Ableitungen $\nabla_{\ldots}X$ und g.

Aufgabe 10.3 (Ableitung der Skalarkrümmung, 4 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe von synchronen Vektorfeldern und der zweiten Bianchi-Identität,

$$(\nabla_X R)(Y, Z, U, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, U, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, U, V) = 0,$$

die Gültigkeit der Gleichung

$$d\,\mathrm{scal} = -2\delta\,\mathrm{Ric}\,.$$

Aufgabe 10.4 (Lemma von Schur, 4 Punkte)

Es sei (M, g) eine mindestens drei-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, so dass für die Riccikrümmung $\mathrm{Ric} = fg$ gilt, wobei f eine glatte Funktion auf M ist. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Hinweis: Aufgabe 9.3.

Die Sternaufgaben sind freiwillig. Frohes neues Jahr.