Prof. Dr. J. Lohkamp
T. Nguyen
Dr. D. Skodlerack

WS 13

11. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1 (letztes Blatt)

(**Abgabe:** bis Dienstag, den 21.01.2014, 12:00 im Zettelkasten 19 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Gauß-Bonet, Euler-Charakteristik, *-Operator, Koableitung, Laplace-Beltrami-Operator.

Aufgabe 11.1 (*-Operator, 4 Punkte)

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Betrachten Sie den $*$-Operator, d die Cartan-Ableitung und $\delta := (-1)^{pn+n} * d*$ die Koableitung zu M. Es sei ω eine Differentialform auf M.

i) Berechnen Sie $*(*(\omega))$.
ii) Zeigen Sie $(*\delta d)(\omega) = (d\delta*)(\omega)$.

Aufgabe 11.2 (Laplace-Beltrami-Operator bei konformer Deformation, 4 Punkte)

Es seien $\Delta := \delta d + d\delta$ der Laplace-Beltrami-Operator einer orientierbaren Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) und f eine glatte überall positive Funktion auf M. Berechnen Sie den Laplace-Beltrami-Operator von (M, fg) mit Hilfe von f und Δ.

Aufgabe 11.3 (Euler-Charakteristik, 2+1 Punkte)

Es seien M_1 und M_2 zwei kompakte zwei-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

i) Zeigen Sie, dass für die Euler-Charakteristik der zusammenhängenden Summe die Gleichung
$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$$
gilt.
ii) Berechnen Sie die Euler-Charakteristik der Oberfläche einer Brezel mit m-Löchern ($m \geq 0$).

Aufgabe 11.4 (Gauß-Bonet, 4 Punkte)

Es sei M eine 2-dimensionale kompakte orientierbare Riemannsche Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, die nicht homöomorph zu S^2 ist. Zeigen Sie, dass es Punkte mit positiver, neutraler und negativer Gaußkrümmung gibt.

Hinweis: In der Vorlesung ist mit Mannigfaltigkeit, wenn nicht weiter spezifiziert, immer unberandet gemeint.

Aufgabe 11.5 (nicht homöomorph zu S^2, 4+4*)

Es sei X der topologische Raum, der entsteht, wenn man das Möbiusband am Rand mit der Einheitskreisscheibe verklebt. Zeigen Sie, dass S^2 nicht homöomorph zu X ist. Sternaufgabe: Zu welchem bekannten topologischen Raum ist X homöomorph?

Sternaufgaben sind freiwillig.