Prof. Dr. Linus Kramer
Raphael Reinauer

WWU Münster
WS 19/20

Differentialgeometrie I

Blatt 11

Abgabe am **09.01.2020** bis **8:15 Uhr** im Briefkasten **Nr. 37**

Aufgabe 1: Zweite Fundamentalform für Graphen (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^\ell$ offen, $\alpha : U \to \mathbb{R}$ glatt und

$$M := \{(u_0, \ldots, u_l) \in \mathbb{R} \times U \mid u_0 = \alpha(u_1, \ldots, u_\ell)\}.$$

Bestimmen Sie die zweite Fundamentalform von M.

Hinweis: Sie können die Berechnungen aus Beispiel §3.11 (b) benutzen.

Aufgabe 2: Rotation $(\mathbf{2} + \mathbf{1} + \mathbf{1}$ Punkte)

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ setze

$$\operatorname{rot}(Z)(X, Y) := g(\nabla_X Z, Y) - g(X, \nabla_Y Z).$$

Zeigen Sie:

(a) Für $p \in M$ hängt der Tangentialvektor $(\operatorname{rot}(Z)(X, Y))_p$ für festes Z nur von X_p und Y_p ab.

(b) Es gilt
$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0$$
für alle $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

(c) In $\mathbb{R}^3$ gilt mit Standardkoordinaten und Vektorprodukt $\times$
$$\operatorname{rot}(Z)(X, Y) = \langle X \times Y, \underline{\operatorname{rot}}(Z)\rangle$$
wobei
$$\underline{\operatorname{rot}}(Z) = \nabla \times Z$$
wie in Analysis II.

Aufgabe 3: Ricci-Tensor $(\mathbf{2} + \mathbf{2}$ Punkte)

Der *Ricci-Tensor* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist der $(0, 2)$-Tensor definiert durch

$$\operatorname{Ric}(X, Y) := \operatorname{tr}[Z \mapsto R(Z, X)Y]$$

für X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Ric}(X, Y) = \operatorname{Ric}(Y, X)$.

(b) Drücken Sie Ric lokal durch Christoffel-Symbole aus.

Aufgabe 4: Einstein-Mannigfaltigkeiten (2 + 2 Punkte)

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *Einstein-Mannigfaltigkeit*, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\mathrm{Ric} = \lambda g.$$

(a) Ist $(\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{eukl}})$ Einsteinsch?

(b) Ist $\mathbb{S}^l \subset \mathbb{R}^{l+1}$ Einsteinsch?

Bonusaufgabe: Kovariante Ableitung von Tensorfeldern (2 + 2 Bonuspunkte)

Die *zweite kovariante Ableitung* für X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ ist definiert durch

$$\nabla^2_{X,Y} Z = (\nabla^2 Z)(X, Y) := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\nabla^2_{X,Y} Z$ in den Argumenten X und Y tensoriell ist, d. h. $C^\infty(M, \mathbb{R})$-linear.

(b) Zeigen Sie für den Krümmungstensor R die Formel

$$R(X, Y)Z = \nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,X} Z \ .$$