Prof. Dr. Linus Kramer
Raphael Reinauer

WWU Münster
WS 19/20

Differentialgeometrie I

Blatt 12

Abgabe am **16.01.2020** bis **8:15 Uhr** im Briefkasten **Nr. 37**

Aufgabe 1: Schnittkrümmung von Untermannigfaltigkeiten (4 Punkte)

Sei $h : M \to N$ eine Riemannsche Immersion, $p \in M$ und $u,\, v \in T_pM$. Sei $H = \operatorname{span}\{u, v\} \subset T_pM$. Weiter bezeichnen K^M und K^N die Schnittkrümmungen von M bzw. N.
Zeigen Sie:

$$K^M(H) = K^N(Dh(p)H) + \frac{g(\mathrm{I\!I}(u,u), \mathrm{I\!I}(v,v)) - g(\mathrm{I\!I}(u,v), \mathrm{I\!I}(u,v))}{\|u\|^2\|v\|^2 - g(u,v)^2}.$$

Aufgabe 2: Codazzi-Gleichung (2 + 2 Punkte)

Sei $h : M \to N$ eine Riemannsche Immersion. Ein *Normalenvektorfeld* Z auf M ist eine glatte Abbildung $Z : M \to \perp M$ mit $Z_p \in \perp_p M$. Seien $X,\, Y,\, W \in \mathfrak{X}(M)$ glatte Vektorfelder. Wir definieren

$$(\nabla^{\perp}_X Z)_p := \operatorname{nor}(\nabla^N_{\widetilde{X}} \widetilde{Z})_p,$$

wobei $\widetilde{X}$ und $\widetilde{Z}$ glatte Vektorfelder in N nahe $h(p)$ sind, die X bzw. Z fortsetzen. Weiterhin setzen wir

$$(\nabla_W \mathrm{I\!I})(X, Y) = \nabla^{\perp}_W(\mathrm{I\!I}(X, Y)) - \mathrm{I\!I}(\nabla^M_W X, Y) - \mathrm{I\!I}(X, \nabla^M_W Y).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\nabla_W \mathrm{I\!I}$ ein symmetrischer $(0, 2)$-Tensor mit Werten in $\perp M$ ist, d. h. $C^\infty(M, \mathbb{R})$-linear in beiden Komponenten und $(\nabla_W \mathrm{I\!I})(X, Y) = (\nabla_W \mathrm{I\!I})(Y, X)$.

(b) Beweisen Sie die *Codazzi-Gleichung*

$$\operatorname{nor}(R(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{W}) = (\nabla_X \mathrm{I\!I})(Y, W) - (\nabla_Y \mathrm{I\!I})(X, W).$$

Aufgabe 3: Zweite Bianchi-Identität (4 Punkte)

Wir betrachten eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g). Die *kovariante Ableitung* ∇R des $(1, 3)$-Tensors R ist der $(1, 4)$-Tensor definiert durch

$$(\nabla_W R)(X, Y)Z := \nabla_W(R(X, Y)Z) - R(\nabla_W X, Y)Z - R(X, \nabla_W Y)Z - R(X, Y)\nabla_W Z$$

für $W,\, X,\, Y,\, Z \in \mathfrak{X}(M)$.
Zeigen Sie die *2. Bianchi-Identität*

$$(\nabla_W R)(X, Y)Z + (\nabla_X R)(Y, W)Z + (\nabla_Y R)(W, X)Z = 0.$$

Aufgabe 4: Spurensuche ($\mathbf{1+1+2}$ Punkte)

Wir betrachten wieder eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^n, g) der Dimension $n \geq 2$.

(a) Zeigen Sie, dass es lokal einen *orthonormalen Rahmen* gibt, d. h. lokale Vektorfelder E_i, die in jedem Punkt eine Orthonormalbasis des Tangentialraums bilden.

(b) Die *Skalarkrümmung* ist definiert durch

$$\mathrm{Scal} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(E_i, E_i),$$

wobei E_i ein orthonormaler Rahmen ist.

Überlegen Sie sich, dass die Skalarkrümmung nicht von der Wahl des orthormalen Rahmens abhängt.

(c) Zeigen Sie:

$$\mathrm{d}\,\mathrm{Scal}(Y) = 2\sum_{i=1}^{n}(E_i(\mathrm{Ric}(E_i, Y)) - \mathrm{Ric}(\nabla_{E_i}E_i, Y) - \mathrm{Ric}(E_i, \nabla_{E_i}Y)),$$

für einen orthonormalen Rahmen E_i.

Hinweis: Finden Sie Spuren der 2. Bianchi-Identität.

Bonusaufgabe: Einstein-Mannigfaltigkeiten revisited (4 Bonuspunkte)

Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n > 2$. Angenommen es gibt ein $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit

$$\mathrm{Ric} = f \cdot g.$$

Zeigen Sie, dass dann f schon konstant ist, also (M, g) eine Einstein-Mannigfaltigkeit ist.

Was passiert in Dimension 2?

Hinweis: Benutzen Sie die Aufgabe 4.