Prof. Dr. Linus Kramer
Raphael Reinauer

WWU Münster
WS 19/20

Differentialgeometrie I

Blatt 2

Abgabe am **24.10.2019** bis **8:15 Uhr** im Briefkasten **Nr. 37**

Aufgabe 1: Hyperflächen (2 + 1 + 1 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix.

Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, Av\rangle = 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

eine eingebettete Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ ist.

Unter welchen Bedingungen an A ist

- M nicht leer,
- M wegzusammenhängend?

Aufgabe 2: Vektorbündel als Moduln (1 + 1 + 2 Punkte)

Sei $X \xrightarrow{\pi} B$ ein Vektorbündel und sei

$$\Gamma(X \to B) := \{s : B \to X \mid s \text{ stetig mit } \pi \circ s = \mathrm{id}_B\}.$$

Elemente aus $\Gamma(X \to B)$ werden als **Schnitte** des Vektorbündels $X \xrightarrow{\pi} B$ bezeichnet.

Zeigen Sie:

(a) $\Gamma(X \to B)$ ist ein reeller Vektorraum.

(b) $\Gamma(X \to B)$ ist ein Modul über $C(B, \mathbb{R})$ bezüglich der Verknüpfung

$$(f \cdot s)(b) = f(b) \cdot s(b)$$

mit $f \in C(B, \mathbb{R})$, $s \in \Gamma(X \to B)$ und $b \in B$.

(c) Ist B kompakt, so ist $\Gamma(X \to B)$ ein endlich erzeugter $C(B, \mathbb{R})$-Modul.

Aufgabe 3: Normalenbündel (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Normalenbündel einer eingebetteten Untermannigfaltigkeit ein Vektorbündel ist.

Aufgabe 4: Normalenbündel von Untermannigfaltigkeiten (3 + 1 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^k$ eine glatte Submersion und $q \in \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie, dass das Normalenbündel der eingebetteten Untermannigfaltigkeit $f^{-1}(q)$ trivial ist.

Geben Sie eine explizite Trivialisierung des Normalenbündels von M aus Aufgabe 1 an.

Bonusaufgabe: Tensorielle Abbildungen (4 Bonuspunkte)

Seien $X \xrightarrow{\pi} B$ und $Y \xrightarrow{\tilde{\pi}} B$ Vektorbündel.

Zeigen Sie, dass es zu jedem $C(B, \mathbb{R})$-Modulhomomorphismus

$$f : \Gamma(X \to B) \to \Gamma(Y \to B)$$

genau einen Morphismus von Vektorbündeln $F : X \to Y$ gibt, sodass

$$f(s) = F \circ s$$

für alle $s \in \Gamma(X \to B)$.