Prof. Dr. Linus Kramer
Raphael Reinauer

WWU Münster
WS 19/20

Differentialgeometrie I

Blatt 3

Abgabe am **31.10.2019** bis **8:15 Uhr** im Briefkasten **Nr. 37**

Aufgabe 1: Mannigfaltigkeitenrecycling (2 + 2 Punkte)

Seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

(a) Sei $W \subset M$ offen und sei

$$\mathcal{A}|_W := \{x \in \mathcal{A} \,|\, x : U \to U' \text{ Karte mit } U \subset W\}.$$

Zeigen Sie, dass $(W, \mathcal{A}|_W)$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und dass die Inklusion $\iota : W \to M$ eine differenzierbare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{C} := \{x \times y : U \times V \to U' \times V' \,|\, x : U \to U',\; y : V \to V' \text{ Karten von } M \text{ bzw. } N\}$$

ein Atlas auf $M \times N$ ist. Konstruieren Sie daraus einen maximalen Atlas $\hat{\mathcal{C}}$, um auf $M \times N$ eine differenzierbare Struktur zu definieren.

Zeigen Sie damit, dass für die differenzierbare Mannigfaltigkeit $(M \times N, \hat{\mathcal{C}})$ die Projektionen $p_1 : M \times N \to M$ und $p_2 : M \times N \to N$ differenzierbare Abbildungen sind.

Aufgabe 2: Vektorbündelprojektion (4 Punkte)

Sei $V \xrightarrow{\pi} B$ ein Vektorbündel. Zeigen Sie, dass π eine offene Abbildung ist, d.h. Bilder offener Mengen sind offen.

Aufgabe 3: Die projektive Gerade (4 Punkte)

Betrachten Sie die **projektive Gerade** $\mathbb{R}P^1$, die definiert ist als der topologische Raum

$$\mathbb{R}P^1 = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\sim .$$

Dabei gelte $x \sim y$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x = \lambda y$ gibt.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^1$ eine differenzierbare 1-Mannigfaltigkeit ist.

Hinweis: Betrachten sie die offenen Teilmengen $U_1 := \{[(x_1, x_2)] \in \mathbb{R}P^1 \,|\, x_1 \neq 0\}$ und $U_2 := \{[(x_1, x_2)] \in \mathbb{R}P^1 \,|\, x_2 \neq 0\}$ und die Abbildungen

$$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R},\; [(x_1, x_2)] \mapsto \frac{x_2}{x_1}$$

und

$$\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R},\; [(x_1, x_2)] \mapsto \frac{x_1}{x_2}.$$

Aufgabe 4: Atlanten von $\mathbb{R}$ ($2+2$ Punkte)

Seien

$$\mathcal{A}_1 := \{x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \text{ mit } x_1(v) = v \text{ für } v \in \mathbb{R}$$

und

$$\mathcal{A}_2 := \{x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \text{ mit } x_2(v) = v^3 \text{ für } v \in \mathbb{R}$$

Atlanten von $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die maximalen Atlanten $\hat{\mathcal{A}}_1$, $\hat{\mathcal{A}}_2$ von $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$ verschieden sind.

(b) Zeigen Sie: $(\mathbb{R}, \hat{\mathcal{A}}_1)$ und $(\mathbb{R}, \hat{\mathcal{A}}_2)$ sind diffeomorph.

Bonusaufgabe: Unendlich viele differenzierbare Strukturen (4 Bonuspunkte)

Zeigen Sie, dass jede topologische Mannigfaltigkeit positiver Dimension mit mindestens einer differenzierbaren Struktur unendlich viele unterschiedliche differenzierbare Strukturen besitzt.