Prof. Dr. Linus Kramer
Raphael Reinauer

WWU Münster
WS 19/20

Differentialgeometrie I

Blatt 4

Abgabe am **07.11.2019** bis **8:15 Uhr** im Briefkasten **Nr. 37**

Aufgabe 1: Fluss auf $\mathbb{R}$ (4 Punkte)

Betrachten Sie die Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}$ mit der Karte $x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Integralkurve sowie den Fluss und seinen Definitionsbereich $\Omega \subset \mathbb{R} \times M$ für das Vektorfeld

$$p \mapsto p^n \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p .$$

Aufgabe 2: Nichteindeutige Differentialgleichung (3 + 1 Punkte)

Zeigen Sie, dass sowohl $f(t) = 0$ als auch $f(t) = \frac{1}{27}t^3$ Lösungen der Differentialgleichung

$$f' = f^{\frac{2}{3}} \quad \text{mit} \quad f(0) = 0$$

auf $\mathbb{R}$ sind.

Warum ist das kein Widerspruch zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösung von Differentialgleichungen (Satz von Picard-Lindelöf)?

Aufgabe 3: Gerade mit unendlich vielen Doppelpunkten (2 + 2 Punkte)

Sei

$$M = (\mathbb{R} \times \{\pm 1\})/\sim \quad \text{mit } (x, 1) \sim (x, -1) \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

versehen mit der Quotiententopologie.

Zeigen Sie, dass jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph zu $(-1, 1)$ ist, dass aber M nicht hausdorffsch ist.

Aufgabe 4: Lie-Klammer auf der Sphäre (1 + 3 Punkte)

Betrachten Sie die Vektorfelder auf $M = \mathbb{R}^3$ bezüglich der Karte $x = (x_1, x_2, x_3) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

$$\begin{aligned} X &= -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ Y &= -x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ Z &= x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Einschränkungen von X, Y und Z auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ tangentiale Vektorfelder auf S^2 sind.

(b) Berechnen Sie die Lie-Klammern $[X, Y]$, $[Y, Z]$ und $[Z, X]$ und zeigen Sie, dass deren Einschränkung auf S^2 tangentiale Vektorfelder sind.

Bonusaufgabe: Wieder ein Widerspruch? (4 Bonuspunkte)

Konstruieren Sie auf M aus Aufgabe 3 ein Vektorfeld, zu dem überabzählbar unendlich viele Integralkurven existieren.
Dabei versehen wir M mit der differenzierbaren Struktur, die von den zwei Karten

$$x_+ : M \supset \mathbb{R} \times \{+1\} \to \mathbb{R},\ (x, 1) \mapsto x$$

und

$$x_- : M \supset \mathbb{R} \times \{-1\} \to \mathbb{R},\ (x, -1) \mapsto x$$

erzeugt wird.

Warum ist das kein Widerspruch zum Satz von der Eindeutigkeit von Integralkurven aus der Vorlesung?