Prof. Dr. Linus Kramer
Raphael Reinauer

WWU Münster
WS 19/20

Differentialgeometrie I

Blatt 5

Abgabe am **14.11.2019** bis **8:15 Uhr** im Briefkasten **Nr. 37**

Aufgabe 1: Tensorprodukte und lineare Abbildungen (2 + 2 Punkte)

Sei k ein Körper und seien E, F und H Vektorräume über k.

(a) Geben Sie explizite Isomorphismen an für:

- $E \otimes k \cong E$
- $\mathrm{Hom}_k(E \otimes F, H) \cong \mathrm{Hom}_k(E, \mathrm{Hom}_k(F, H))$
- $\mathrm{Hom}_k(E, \mathrm{Hom}_k(F, H)) \cong \mathrm{Bil}(E, F, H)$.

Dabei bezeichnet $\mathrm{Bil}(E, F, H)$ den Raum der bilinearen Abbildungen $E \times F \to H$.

Zeigen Sie weiterhin, dass diese Abbildungen tatsächlich Isomorphismen sind.

(b) Zeigen Sie unter der Voraussetzung $\dim_k E,\ \dim_k F < \infty$, dass folgende Vektorräume *kanonisch* isomorph sind:

- $E^* \otimes F^* \cong (E \otimes F)^*$
- $E^* \otimes F \cong \mathrm{Hom}_k(E, F)$
- $E^* \otimes E^* \cong \mathrm{Bil}(E, E, k)$.

Dabei bezeichnet V^* den Dualraum eines k-Vektorraums V.

Aufgabe 2: Simultane Diagonalisierung für Bilinearformen (4 Punkte)

Seien A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen und sei A positiv definit, d. h. alle Eigenwerte von A sind größer 0.

Zeigen Sie, dass es ein $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gibt, sodass

$$CAC^T \text{ und } CBC^T$$

diagonal sind.

Aufgabe 3: Tensorfelder (2 + 2 Punkte)

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R}),\ (\alpha, X, Y) \mapsto \alpha([X, Y])$$

im Allgemeinen *kein* Tensorfeld vom Typ $(1, 2)$ ist.

(b) Sei ∇ ein affiner Zusammenhang. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R}),\ (\alpha, X, Y) \mapsto \alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])$$

ein Tensorfeld vom Typ $(1, 2)$ ist.

Aufgabe 4: 1-Form, die nicht von einer Funktion kommt (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die 1-Form

$$\omega := \frac{x_1 \mathrm{d}x_2 - x_2 \mathrm{d}x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit der Karte $x = (x_1, x_2)$ *nicht* das Differential einer glatten Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

ist.

Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass für $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ die Funktion

$$f(x_1, x_2) := \arctan(x_2/x_1)$$

die Gleichung $\mathrm{d}f = \omega$ erfüllt. Erweitern Sie dann diese Funktion schrittweise zu einer Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}) \to \mathbb{R}$$

mit $\mathrm{d}f = \omega$.

Schließen Sie dann, dass es keine Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

mit $\mathrm{d}f = \omega$ geben kann.

Bonusaufgabe: Komplexe projektive Gerade (4 Bonuspunkte)

Ähnlich wie die (reelle) projektive Gerade $\mathbb{RP}^1$ (Aufgabe 3, Übungsblatt 3) betrachten wir die **komplexe projektive Gerade** $\mathbb{CP}^1$. Diese ist als topologischer Raum definiert als

$$\mathbb{CP}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \sim,$$

mit $x \sim y$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt mit $x = \lambda y$.
Analog zum $\mathbb{RP}^1$ betrachtet man die Karten (φ_1, U_1) und (φ_2, U_2) mit $U_1 := \{[(x_1, x_2)] \in \mathbb{CP}^1 \mid x_1 \neq 0\}$, $U_2 := \{[(x_1, x_2)] \in \mathbb{CP}^1 \mid x_2 \neq 0\}$ und

$$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C},\ [(x_1, x_2)] \mapsto \frac{x_2}{x_1}$$

und

$$\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{C},\ [(x_1, x_2)] \mapsto \frac{x_1}{x_2}.$$

Zeigen, Sie dass die Kartenwechselabbildungen *holomorph* sind.
Sei $f : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass ihre Einschränkungen auf die Karten (φ_1, U_1) und (φ_2, U_2) holomorph sind. Zeigen Sie, dass dann f konstant sein muss.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Liouville aus der Funktionentheorie.