Prof. Dr. Linus Kramer
Raphael Reinauer

WWU Münster
WS 19/20

Differentialgeometrie I

Blatt 7

Abgabe am **28.11.2019** bis **8:15 Uhr** im Briefkasten **Nr. 37**

Aufgabe 1: Triviale Metrik? (4 Punkte)

Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n mit glatt trivialem Tangentialbündel, d.h. es existiert ein glatter Isomorphismus von Vektorbündeln $TM \cong M \times \mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie, dass M metrisierbar ist.

Hinweis: Wir haben glatte Mannigfaltikeiten nicht als zweitabzählbar vorausgesetzt.

Aufgabe 2: Geodäten auf dem Zylinder (1 + 2 + 1 Punkte)

(a) Geben Sie die Geodätengleichung auf dem Zylinder Z vom Radius 1 an. Benutzen Sie dabei die Koordinaten von Aufgabe 1(b) auf Blatt 6.

(b) Geben Sie alle Geodäten explizit an.

(c) Geben Sie alle Geodäten auf Z an, die die Punkte $(1, 0, 0)$ und $(1, 0, 1) \in Z \subset \mathbb{R}^3$ verbinden.

Aufgabe 3: Geodäten auf der Sphäre (1 + 2 + 1 Punkte)

(a) Geben Sie die Geodätengleichung der Sphäre $\mathbb{S}^2$ in sphärischen Koordinaten an.

(b) Für ein $\vartheta \in (0, \pi)$ betrachten wir die Kurve c_ϑ, die in sphärischen Koordinaten durch $\theta(c_\vartheta(t)) = \vartheta$ und $\varphi(c_\vartheta(t)) = t$ gegeben ist.

Skizzieren Sie ein paar Kurven c_ϑ!

Für welche Werte von ϑ ist c_ϑ eine Geodäte?

(c) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass Geodäten auf der Sphäre genau (Teile von) Großkreise(n) sind.

Aufgabe 4: Paralleltransport (2 + 2 Punkte)

Wir betrachten eine riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) und eine glatte Kurve $c : I = [0, 1] \to M$ mit Anfangspunkt $p = c(0)$ und Endpunkt $q = c(1)$. Wir bezeichnen den *Paralleltransport* entlang c mit

$$P^c : (T_pM, g_p) \to (T_qM, g_q).$$

Dabei ist für ein $v \in T_pM$ das Bild unter der Abbildung der Tangentialvektor $P^c(v) = X_1$, wobei $X \in \mathfrak{X}(c)$ das eindeutig parallele Vektorfeld mit $X_0 = v$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass P^c nicht von der Parametrisierung von c abhängt, d.h. wenn $\kappa : [0, 1] \to [0, 1]$ ein monoton wachsender Diffeomorphismus ist, so gilt für $\tilde{c} = c \circ \kappa$, dass $P^{\tilde{c}} = P^c$.

(b) Zeigen Sie, dass P^c eine Isometrie ist.

Bonusaufgabe: Kinetische Energie ($\mathbf{2+2}$ Bonuspunkte)

Wir betrachten eine riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) und fixieren ein Intervall $[0,1]$.
Für eine Kurve $c : [0,1] \to M$ sei die *kinetische Energie* definiert als das Integral

$$E(c) := \int_0^1 |\dot{c}(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Für $p,\, q \in M$ sei $\Omega(p,q)$ die Menge aller differenzierbaren Kurven $c : [0,1] \to M$ mit Startpunkt p und Endpunkt q.

(a) Benutzen Sie die *Schwarz'sche Ungleichung*

$$\left(\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(t)^2 \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g(t)^2 \mathrm{d}t\right),$$

um zu zeigen, dass

$$L(c)^2 \leq E(c).$$

Zeigen Sie weiter, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn $|\dot{c}|$ konstant ist.

(b) Zeigen Sie, dass $c \in \Omega(p,q)$ genau dann minimale Energie hat, wenn $|\dot{c}|$ konstant ist und wenn c minimale Länge hat.