Prof. Dr. Linus Kramer
Raphael Reinauer

WWU Münster
WS 19/20

Differentialgeometrie I

Blatt 9

Abgabe am **12.12.2019** bis **8:15 Uhr** im Briefkasten **Nr. 37**

Aufgabe 1: Metrische Räume (2 + 2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass jeder eigentliche metrische Raum (X, d) vollständig ist. Dabei ist ein metrischer Raum *eigentlich*, falls abgeschlossene und beschränkte Teilmengen kompakt sind.

(b) Gilt auch die Umkehrung, wenn man zusätzlich fordert, dass X lokalkompakt ist?

Aufgabe 2: Hyperboloid Modell des Hyperbolischer Raum (1 + 1 + 2 Punkte)

Auf $\mathbb{R}^{l+1}$ betrachten wir die Bilinearform

$$\beta(u, v) = -u_0 v_0 + \sum_{j=1}^{l} u_j v_j$$

für $u = (u_0, u_1, \ldots, u_l)$ und $v = (v_0, v_1, \ldots, v_l)$.
Wir setzen

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}^l := \{p \in \mathbb{R}^{l+1} | \, p_0 > 0 \text{ und } \beta(p, p) = -1\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}$ eine zusammenhängende l-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{l+1}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$T_p\mathbb{H} = \{(p, u) \in \{p\} \times \mathbb{R}^{l+1} | \; \beta(p, u) = 0\}$$

für $p \in \mathbb{H}$.

(c) Zeigen Sie, dass durch

$$g_p((p, u), (p, v)) = \beta(u, v)$$

eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{H}$ definiert ist.

Aufgabe 3: Projektive Räume (2 + 2 Punkte)

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $U = \{z \in \mathbb{K} \,|\, |z| = 1\}$ und $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} = 1, 2$.
Wir definieren für $m \geq 1$ den *projektiven Raum vom Grad* m durch

$$\mathbb{K}P^m = \mathbb{S}^{d(m+1)-1} / \sim,$$

wobei $u \sim v$ für $u, v \in \mathbb{S}^{d(m+1)-1} \subset \mathbb{K}^m$ genau dann, wenn es ein $z \in U$ gibt mit $u = zv$.

(a) Wir fassen $u \in S^{d(m+1)-1}$ als Spaltenvektor auf. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\lambda : \mathbb{S}^{d(m+1)-1} \to \mathbb{K}^{(m+1)\times(m+1)},\ u \mapsto u \cdot \overline{u}^T$$

durch $\mathbb{K}P^m$ faktorisiert, d.h. es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{d(m+1)-1} \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\mu"'] & & \mathbb{K}^{(m+1)\times(m+1)} \\ & \mathbb{K}P^m, \arrow[ur, dashed, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

wobei μ die Quotientenabbildung ist. Zeigen sie weiter, dass ρ injektiv und stetig ist.

(b) Setzt man

$$U_j = \{[u] \in \mathbb{H} |\ u \in \mathbb{S}^{d(m+1)-1},\ u_j \neq 0\}$$

für $j = 0, \dots, m$, so erhält man einen verträglichen Atlas bestehend aus $m+1$ Karten

$$\varphi_j : U_j \to \mathbb{K}^m,\ \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{j-1} \\ u_j \\ u_{j+1} \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \mapsto u_j^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{j-1} \\ u_{j+1} \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

Zeigen sie, dass dann ρ eine glatte Einbettung ist.

Aufgabe 4: Hyperbolischer Levi-Civita Zusammenhang ($\mathbf{2+2}$ Punkte)

Sei $\mathbb{H} = \mathbb{H}^l$ wie in Aufgabe 2. Für $p \in \mathbb{H}$ definieren wir

$$\pi_p :\ \mathbb{R}^{l+1} \to T_p\mathbb{H},\ v \mapsto (p, v - \beta(p,v)p)$$

(a) Zeigen Sie, dass der Levi-Civita Zusammenhang von $(\mathbb{H}, g)$ durch

$$\nabla_X Y = \pi_p(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})$$

gegeben ist. Dabei sind X und Y Vektorfelder auf $\mathbb{H}$ und $\tilde{X}$ bzw. $\tilde{Y}$ Fortsetzungen davon.

(b) Folgern Sie, dass die Kurven

$$c(t) = (\cosh(t), u_1 \sinh(t), \dots, u_l \sinh(t))$$

für u_i mit $u_1^2 + \ldots + u_l^2 = 1$ Geodäten in $\mathbb{H}$ sind. Skizzieren Sie diese für $l = 2$.

Bonusaufgabe: Exponentialfunktion auf der Sphäre ($\mathbf{2+1+1}$ Bonuspunkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion auf der 2-Sphäre für $p \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ durch

$$\exp_p : T_p\mathbb{S}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^2,\ \exp_p(v) = \cos(\|v\|)p + \sin(\|v\|)\frac{v}{\|v\|}$$

gegeben ist. Dabei fassen wir $T_p\mathbb{S}^2$ als Unterraum von $\mathbb{R}^3$ auf.

(b) Geben Sie die maximale offene Kugel $B_R(0) \subset T_p\mathbb{S}^2$ an, auf der $\exp_p$ injektiv ist.

(c) Geben Sie die Standard-Metrik von $\mathbb{S}^2$ in Normalkoordinaten an.