Differentialgeometrie I

Münster

WS 19/20

Linus Kramer

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) ein Raum M, der im Kleinen (topologisch) wie eine offene Menge im $\mathbb{R}^n$ aussieht. Das erlaubt uns, über differenzierbare Abbildungen auf M zu sprechen. Die Riemannsche Metrik g ist ein Skalarprodukt, mit dem man Winkel zwischen Geschwindigkeitsvektoren sowie Kurvenlängen messen kann. Das führt zum sogenannten Krümmungstensor R, einer multilinearen Abbildung, und zu weiteren Maßen für "Krümmung" von M in einem Punkt $p \in M$. Eine interessante Frage ist dann, wie weit das (lokale) Krümmungsverhalten von M die Struktur und Geometrie von M "im Großen" beeinflusst. Dafür werden wir in der Vorlesung verschiedene Beispiele sehen.

Ein einfaches Beispiel ist die 2-Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v,v \rangle = 1 \}$, dabei ist $\langle\,,\rangle$ das Standard-Skalarprodukt, $\langle u,v \rangle = \sum_{j=1}^{3} u_j v_j$.

Für $p \in \mathbb{S}^2$ wird der Winkel zwischen Geschwindigkeitsvektoren u, v durch p mit $\langle\,,\rangle$ gemessen. Kürzeste Kurven auf der Kugeloberfläche $\mathbb{S}^2$ sind Großkreissegmente, die Krümmung der 2-Sphäre ist überall gleich und positiv. Die Summe der Innenwinkel eines (kleinen) Dreiecks auf $\mathbb{S}^2$ ist stets größer als $180^\circ = \pi$ (im Gegensatz zur Ebene $\mathbb{E}^2$).

In der Bibliothek gibt es einen Semesterapparat mit (vielen) Büchern. Besonders empfehlen will ich die Bücher von Boothby und O'Neill.

Thematisch orientiert sich die Vorlesung am üblichen Zyklus zur Differentialgeometrie