§1. Die Grundlagen und etwas mehr

1. <u>Vorüberlegung.</u> Ist E ein n-dimensionaler reeller Vektorraum, so gibt es einen linearen Isomorphismus $T: \mathbb{R}^n \to E$ (durch Wahl einer Basis von E). Über T können wir die Topologie von $\mathbb{R}^n$ auf E übertragen. Ist $S: \mathbb{R}^n \to E$ ein anderer lin. Isom., so ist $S^{-1} \circ T$ ein lin. Automorphismus von $\mathbb{R}^n$. Also induzieren S und T die gleiche Topologie auf E. Damit können wir über stetige und differenzierbare Abbildungen sprechen.

Für den Rest von §1 sind E, F stets endlich dimensionale reelle Vektorräume.

2. <u>Konvention</u> Sei $U \subseteq E$ und $V \subseteq F$ offen. Für $r \geq 1$ setzen wir

$$C^r(U,V) = \{ f: U \to V \mid f \text{ ist } r\text{-mal stetig diff'bar} \}$$

sowie

$$C^\infty(U,V) = \bigcap_{r=1}^{\infty} C^r(U,V).$$

Funktionen in $C^\infty(U,V)$ nennen wir <u>glatt</u>.

Für $u \in U$ schreiben wir die (totale) Ableitung von $f \in C^r(U,V)$ im Punkt u als

$$Df(u) : E \to F$$

das ist eine lineare Abbildung. Ist $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ so ist $Df(u)$ durch die Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(u) \right)_{\substack{k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$ gegeben

Ist H ein weiterer endlich dim. reeller Vektorraum, $W \subseteq H$ offen, $g \in C^r(V,W)$, $f \in C^r(U,V)$, so ist $g \circ f \in C^r(U,W)$ und es gilt die

Kettenregel

$$D(g \circ f)(u) = Dg(f(u)) \circ Df(u)$$

Komposition von lin. Abbildungen

3. Def Seien $U \subseteq E$ und $V \subseteq F$ offen. Wir nennen $f \in C^r(U,V)$ ein C^r-Diffeomorphismus, wenn es $g \in C^r(V,U)$ gibt mit

$$g \circ f = id_U \quad \text{und} \quad f \circ g = id_V$$

Ist $U \neq \emptyset$, so folgt mit der Kettenregel, dass $\dim(E) = \dim(F)$ gilt.

Wir nennen $f \in C^r(U,V)$ eine Submersion, wenn für jedes $u \in U$ die Ableitung

$$Df(u): E \to F$$

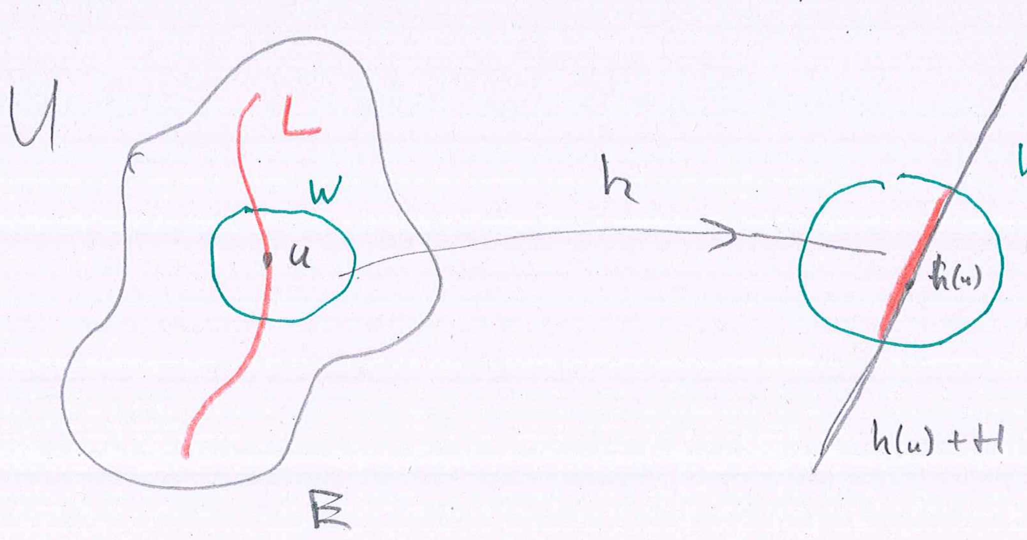
surjektiv ist. Ist $U \neq \emptyset$, so folgt $\dim(E) \geq \dim(F)$.

Bsp
$$pr_1 : E \oplus F \to E, \quad (x,y) \longmapsto x$$
ist Submersion.

4\. Def Sei $U \subseteq E$ offen, $l \geq 0$. Eine Teilmenge $L \subseteq U$ heißt eingebettete l-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn für jedes $u \in L$ eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von u, ein Diffeomorphismus $h: W \to W' \subseteq F$ (*) und ein l-dimensionaler Unterraum $H \subseteq F$ gibt mit

$$h(L \cap W) = (h(u) + H) \cap W'$$

(*) also ist $\dim F = \dim E$



Bsp • $L \subseteq U$ offen $\Rightarrow$ L ist m-dim eing. Umf, $m = \dim(E)$

• $L = \{u\} \subseteq U$ $\Rightarrow$ L ist 0-dim eing. Umf

• Ist $L \subseteq U$ Teilmenge und gibt es zu jedem $u \in L$ eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von u so, dass $L \cap V$ eing. l-dim Umf in V ist, so ist L eing. l-dim. Umf in U.

Ein wichtiges Hilfsmittel ist der Satz vom lokalen Inversen.

5. **Theorem** Satz vom lokalen Inversen.

Sei $U \subseteq E$ und $V \subseteq F$ offen, sei $f \in C^r(U,V)$.

Angenommen, es gilt für ein $u \in U$, dass die Ableitung

$$Df(u) : E \to F$$

ein Isomorphismus ist (also $\dim(E) = \dim(F)$).

Dann gibt es offene Umgebung $W \subseteq U$ von u und $W' \subseteq V$ von $f(u)$ so, dass die Einschränkung

$$f\big|_W : W \to W'$$

ein C^r-Diffeomorphismus ist.

($\to$ Lang, Real Analysis, Ana II Vorlesung)

Bsp $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

$Df(u)(v) = 2uv \rightsquigarrow$ für jedes $u \neq 0$ gibt es eine lokale glatte Umkehrfunktion,

nämlich $y \mapsto \sqrt{y}$ für $y > 0$

$y \mapsto -\sqrt{y}$ für $y < 0$

6. <u>Korollar</u> (Satz über implizite Funktionen)

Sei $U \subseteq E$ und $V \subseteq F$ offen, sei $f \in C^r(U,V)$, sei $u \in U$. Wenn $Df(u): E \to F$ surjektiv ist, mit $K = \ker(Df(u))$, so gibt es offene Mengen $W \subseteq U$ mit $u \in W$, $W' \subseteq F \oplus K$ und einen Diffeomorphismus $h: W \to W'$ so, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f|_W"'] & W' \subseteq F \oplus K \arrow[d, "pr_1|_{W'}"] \\ V \arrow[r, hook] & F \end{tikzcd}$$

kommutiert. Insbesondere ist $f^{-1}(f(u)) \cap W$ eine eingeb. Umf der Dimension $\dim(K)$ in W. #

<u>Beweis</u> Sei $H \subseteq E$ ein komplementärer Untervektorraum zu K, also $E = K \oplus H$. Jedes $v \in E$ hat also eindeutige Zerlegung $v = v_1 + v_2$ $v_1 \in K$, $v_2 \in H$.

Setze $h(v) = (f(v), v_1) \in F \oplus H$. Dann ist h C^r-Abbildung und $\ker(Dh(u)) = K \cap H = \{0\}$. Da $\dim E = \dim(F \oplus H)$ ist $Dh(u)$ ein Isomorphismus.

Nach dem Satz von lokalen Invers §1.5 existieren W, U' wie behauptet. Das Diagramm kommutiert nach Konstruktion von h.
Weiter bildet h die Menge $f^{-1}(f(u)) \cap W$ bijektiv auf $(h(u)+H) \cap W'$ ab. $\square$

7. __Satz__ Sei $U \subseteq E$ und $V \subseteq F$ offen und $f \in C^r(U,V)$ eine Submersion. Dann ist für jedes $v \in V$ das Urbild $f^{-1}(v) = L \subseteq U$ eine eing. Umf der Dimension $l = \dim(E) - \dim(F)$ (und eventuell leer).
Weiter ist f eine offene Abbildung (d.h. f-Bilder offener Mengen $X \subseteq U$ sind offen).

__Beweis__ Ist $L = \emptyset$ so ist nichts zu zeigen. Ist $u \in L$, so gibt es nach §1.6 eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von u so, dass $L \cap W$ eine l-dim. eing. Umf in W ist. Folglich ist $L \subseteq U$ eine l-dimensionale eing. Umf in U.
Ist $X \subseteq U$ offen und $u \in X$, so ist nach

dem Diagramm
$$\begin{tikzcd} W \cap X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & h(W \cap X) \subseteq F \oplus H \arrow[d, "pr_1"] \\ V \arrow[r, hook] & F \end{tikzcd}$$
und $f(W \cap X)$ offen in V (denn pr_1 ist offene Abbildung). $\square$

8. <u>Beispiel</u> Für $n \geq 0$ und $t \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die <u>n-Sphäre vom Radius t</u>
$$S_t^n = \{ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \ldots + x_n^2 = t^2 \}$$
ein n-dim. eingeb. Umanf.

<u>Denn</u> $U = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$

$f(x_0, \ldots, x_n) = x_0^2 + \ldots + x_n^2$, $f : U \to \mathbb{R}$

$Df(u)(v) = 2 \cdot (u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n)$

$\Rightarrow$ $Df(u)$ ist surjektive lin. Abbildung $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $S_t^n = f^{-1}(t^2)$ ist eing. Umanf in U

$\Rightarrow$ S_t^n ist eing. Uman in $\mathbb{R}^{n+1}$ $\square$

9. **Def** Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, sei $U \subseteq E$ offen, sei $c \in C^r(J, U)$. Wir nennen c eine C^r-Kurve. Für $s \in J$ ist der <u>Tangentialvektor</u> zur Zeit s

$$\dot{c}(s) = \left(c(s), \frac{d}{dt} c(t)\Big|_{t=s}\right) \in U \times E$$

Ist $E = \mathbb{R}^m$ und $c = (c_1, \dots, c_m)$, so ist also

$$\dot{c}(s) = (c_1(s), \dots, c_m(s), c_1'(s), \dots, c_m'(s)).$$

Ist $L \subseteq U$ eine eingebettete Umf. so heißt c Kurve in L, falls $c(J) \subseteq L$ gilt.

Der <u>Tangentialraum</u> von L im Punkt $u \in L$ ist

$$T_u L = \{ \dot{c}(0) \mid c \ C^r\text{-Kurve in } L \text{ mit } c(0) = u \}$$
$$\subseteq \{u\} \times E$$

10. Lemma Sei $U \subseteq E$ offen, sei $L \subseteq U$ eine eingebettete l-dimensionale Untermannigfaltigkeit, sei $u \in L$. Dann gibt es einen l-dimensionalen Untervektorraum $E(u) \subseteq E$ so, dass gilt

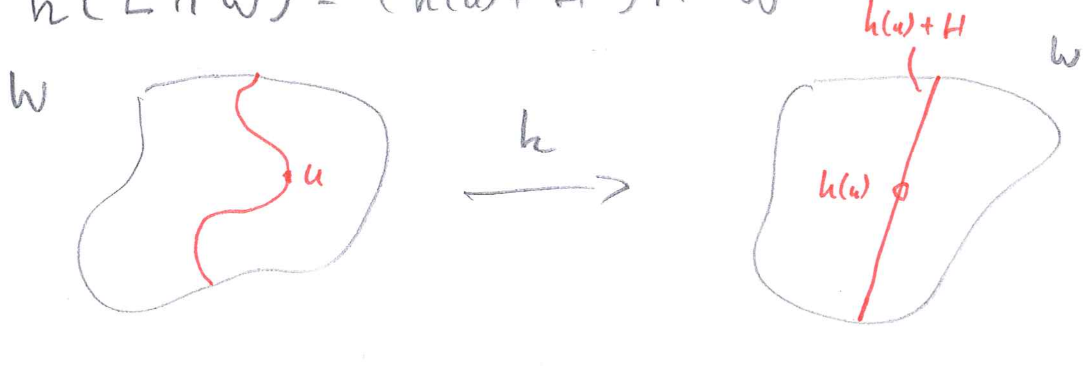
$$T_u L = \{u\} \times E(u) \subseteq U \times E$$

Insbesondere ist die Dimension l von L wohldefiniert, wenn $L \neq \emptyset$.

Beweis Wir setzen $E(u) = \left\{ \frac{d}{dt} c(t)\Big|_{t=0} \;\Big|\; c \text{ Kurve in } L \text{ mit } c(0) = u \right\}$. Zu zeigen ist, dass $E(u)$ ein l-dimensionaler Untervektorraum in E ist.

Nach Voraussetzung gibt es eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von u, $W' \subseteq F$ offen, einen l-dimensionalen Untervektorraum $H \subseteq F$ und einen Diffeomorphismus $h: W \to W'$ so, dass gilt

$$h(L \cap W) = (h(u) + H) \cap W'$$



Wir setzen $\Phi = (Dh(u))^{-1} : F \to E$, (linear)

Beh $\Phi(H) = E(u)$. ($\Leftrightarrow H = Dh(u)(E(u))$)

"$\subseteq$" Für $v \in H$ definiere $c(t) = h^{-1}(h(u) + t \cdot v)$

$\leadsto c(0) = u$, für t nahe 0 ist c Kurve in L.

Wegen $h \circ c(t) = h(u) + tv$ folgt

$$Dh(u)(c'(0)) = v \leadsto \Phi(v) = c'(0) \in E(u)$$

"$\supseteq$" Ist c Kurve in L mit $c(0) = u$, so ist

$h \circ c(t) \in h(u) + H$ für t nahe 0, also

$$D(h \circ c)(0) = Dh(c'(0)) \in H \qquad \square$$

11. Satz Sei $U \subseteq E$ offen, sei $L \subseteq U$ eine eingebettete l-dimensionale (C^r) Untermannigfaltigkeit. Setze

$$TL = \bigcup_{u \in L} T_u L \subseteq U \times E$$

Dann ist TL eine $2l$-dimensionale eingeb. C^{r-1} Umf. in $U \times E$.

Beweis Sei $(u, v) \in TL$. Da L eine Untermanf. ist, gibt es eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von u, einen Diffeomorphismus $h : W \to W' \subseteq F$, einen l-dimensionalen Unterraum $H \subseteq F$ mit

$h(L\cap W) = (h(u)+H)\cap W'$. Betracht den

Diffeomorphism $\hat{h}: W\times E \to W'\times E$

$$(x,y) \longmapsto (h(x), Dh(x)(y))$$

mit Inverse $(\tilde{x},\tilde{y}) \longmapsto (h^{-1}(\tilde{x}), Dh(h^{-1}(\tilde{x}))^{-1}(\tilde{y}))$

Es gilt $(x,y) \in TL \cap (W\times E)$

$$\iff \hat{h}(x,y) \in \big((h(u)+H)\cap W'\big)\times H$$

$$\iff \hat{h}(x,y) \in \big((h(u)+H)\times H\big)\cap(W'\times F) \quad \square$$

<u>Beispiele</u>

- $U = L \rightsquigarrow TL = U\times E$
- $U \supseteq \{u\} = L \rightsquigarrow TL = \{u\}\times E$
- $U = \mathbb{R}^{n+1} \supseteq S^n_t = L$

  $T_u S^n_t = \{u\}\times u^{\perp} = \{(u,v) \mid \langle u,v\rangle = 0\}$

  $TS^n_t = \{(u,v)\in \mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1} \mid \|u\| = t \text{ und } \langle u,v\rangle = 0\}$

<u>Beobachtung</u> Wir können uns TL als eine durch L parametrisierte Familie von l-dimensionalen Vektorräumen T_uL vorstellen. Das führt zu Vektorbündeln.

12. Def Sei $X \xrightarrow{\pi} B$ eine stetige Abbildung von Hausdorffräumen (oder sogar metrischen Räumen). Für $b \in B$ heißt $X_b = \pi^{-1}(b) \subseteq X$ die Faser über b.

Eine stetige Abbildung $\sigma : B \to X$ heißt Schnitt, falls gilt $\pi \circ \sigma = id_B$. Wir nennen B Basis und X Totalraum von $X \xrightarrow{\pi} B$. Für $A \subseteq B$ schreiben wir $X_A = \pi^{-1}(A)$.

Wir nennen $X \xrightarrow{\pi} B$ ein l-dimensionales Vektorbündel über B, wenn folgendes gilt:

(VB1) Für jedes $b \in B$ ist X_b ein l-dimensionaler reeller Vektorraum, d.h. es sind Verknüpfungen $+_b$, $\cdot_b$ gegeben, für jedes $b \in B$,

$+_b : X_b \times X_b \to X_b$

$\cdot_b : \mathbb{R} \times X_b \to X_b$

sodass die üblichen Vektorraumaxiome erfüllt sind und $X_b \cong \mathbb{R}^l$.

(VB2) Für jedes $b \in B$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq B$ von b und einen Homöomorphismus

$X_U \xrightarrow{h_U} U \times \mathbb{R}^\ell$ so, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_U \arrow[r, "h_U", "\cong"'] \arrow[d, "\pi|_U"'] & U \times \mathbb{R}^\ell \arrow[d, "pr_1"] \\ U \arrow[r, equal] & U \end{tikzcd}$$

kommutiert und so, dass für jedes $p \in U$ die Abbildung

$$\underbrace{X_p}_{\substack{= \pi^{-1}(p) \\ \text{Faser über } p}} \xrightarrow{h_U} \{p\} \times \mathbb{R}^\ell \xrightarrow{pr_2} \mathbb{R}^\ell$$

ein linearer Isomorphismus ist. #

13 <u>Bsp</u> $X = B \times \mathbb{R}^\ell$, $\pi = pr_1$ (solche Vektorbündel nennt man <u>trivial</u> und schreibt kurz $X = \underline{\mathbb{R}^\ell}$, wenn klar ist, was B ist).

13. Einen Schnitt eines Vektorbündels nennt man auch ein <u>stetiges Vektorfeld</u>.

Für jedes Vektorbündel $X \xrightarrow{\pi} B$ ist der <u>Nullschnitt</u>, der jedem $b \in B$ das Nullelement $0_b \in X_b$ zuordnet, ein stetiges Vektorfeld. Sind σ_1 und σ_2 stetige Vektorfelder, so ist auch

stetige Abbildungen $B \to \mathbb{R}$

$$\sigma_1 + \sigma_2 : B \to X \,,\; b \longmapsto \sigma_1(b) +_b \sigma_2(b)$$

ein stetiges Vektorfeld. Ist $f \in C(B, \mathbb{R})$, so ist $f \cdot \sigma_1 = [b \longmapsto f(b) \cdot_b \sigma_1(b)]$ ein stetiges Vektorfeld.

Setzt man $\Gamma(X \xrightarrow{\pi} B) = \{\sigma : B \to X \mid \sigma \text{ stetiges Vektorfeld}\}$, dann ist $\Gamma(X \xrightarrow{\pi} B)$ ein (im allgemeinen unendlich-dimensionaler) Vektorraum und ein $C(B, \mathbb{R})$-Modul (ÜA).

14. <u>Satz</u> Sei $U \subseteq E$ offen, sei $L \subseteq U$ eine eingeb. l-dimensionale Umf. Dann ist

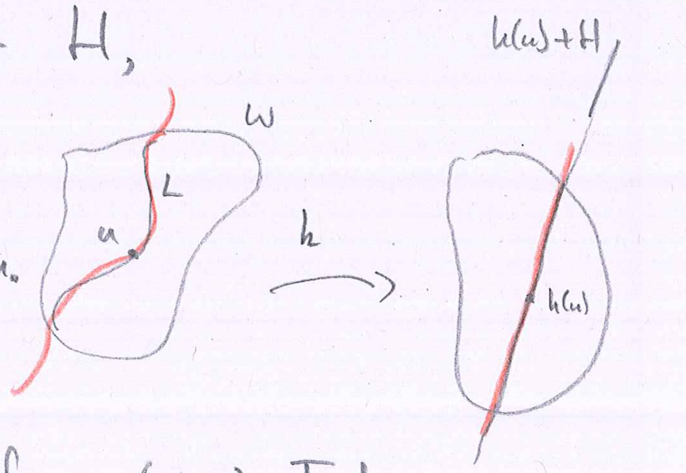
$$TL \xrightarrow{\pi} L \,, \quad \pi(u,v) = u$$

ein l-dimensionales Vektorbündel, das <u>Tangential-bündel</u> von L.

<u>Beweis</u> Sei $u \in L$, sei $W \subseteq U$ offene Umgebung von u, $h : W \to W' \subseteq F$ Diffeomorphismus, $H \subseteq F$ Unter-

Vektoren, $b_1, \dots, b_\ell$ Basis von H,

$h(W \cap L) = (h(u) + H) \cap W'$



Über $b_1, \dots, b_\ell$ erhalten wir einen lin. Isomorphismus $S : H \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^\ell$

Wir setzen $V = L \cap W$, für $(x,y) \in T_x L$

setze $h_V(x,y) = (x, Dh(x)(y)) \in V \times H$

Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(V) = (TL)_V \arrow[r, "h_V", "\cong \text{ homöomorph}"'] \arrow[d, "\pi"] & V \times H \cong V \times \mathbb{R}^\ell \arrow[d, "pr_1"] \\
V \arrow[r, equal] & V
\end{tikzcd}$$

und für jedes $x \in L$ ist

$$(TL)_x = T_x L \xrightarrow{h_V} \{x\} \times H \xrightarrow{\cong} \{x\} \times \mathbb{R}^\ell$$

ein linearer Isomorphismus. $\square$

Die Abbildung h_V ist nicht nur ein Homöomorphismus, sondern sogar ein C^{r-1}-Diffeomorphismus. (Solche Vektorbündel nennt man glatt, wenn $r = r-1 = \infty$)

Schnitte im Tangentialbündel nennt man
<u>tangentiale Vektorfelder</u>.

15. <u>Bsp</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, sei $L \subseteq U$ eine
eingeb. l-dimensionale Umf. Für $u \in L$
setze $\perp_u L = \{(u,v) \in \{u\} \times E \mid \langle v,w \rangle = 0$ für alle
$(u,w) \in T_u L\}$

Man nennt $\perp L = \bigcup_{u \in L} \perp_u L$ das <u>Normalbündel</u> von L.
Das Normalbündel ist ein Vektorbündel mit
$(m-l)$-dimensionalen Fasern, $\dim(\perp_u L) = m-l$. (ÜA)

Etwa $L = S^n_t \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $u \in S^n_t$

$$\Rightarrow T_u S^n_t = \{(u,w) \in \{u\} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle u,w \rangle = 0\}$$

$$\perp_u S^n_t = \{(u, s \cdot u) \in \{u\} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid s \in \mathbb{R}\}$$

$\perp S^n_t$ ist triviales 1-dimensionales Vektorbündel;

via

$$S^n_t \times \mathbb{R} \longrightarrow \perp S^n_t$$
$$(u,r) \longmapsto (u, ru)$$

(ÜA)

16. Def Sei $X \xrightarrow{\pi} B$ und $Y \xrightarrow{\rho} B$ Vektorbündel. Ein <u>Morphismus von Vektorbündeln</u> ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit

(1) Das Diagramm
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ B & = & B \end{array}$$
kommutiert, d.h. für alle $b \in B$ ist $f(X_b) \subseteq Y_b$ und

(2) Für jedes $b \in B$ ist $X_b \xrightarrow{f} Y_b$ linear.

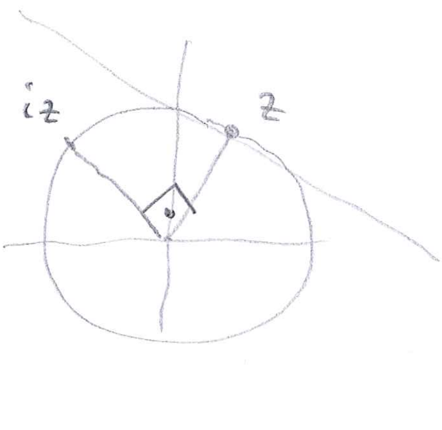
Ein <u>Isomorphismus</u> (von Vektorbündeln über B) ist ein Morphismus, der ein (beidseitiges) Inverses hat. Ein (l-dim) Vektorbündel ist <u>trivial</u>, wenn es isomorph zu $B \times \mathbb{R}^l$ ist.

<u>Beispiel</u> Für $n = 0, 1, 3, 7$ ist das Tangentialbündel von $\mathbb{S}^n = S^n_1$ trivial.

(n=0) $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\} \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad T\mathbb{S}^0 = \{(\pm 1, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$
$= \mathbb{S}^0 \times \{0\}$ (✓)

(n=1) $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ $\qquad i = \sqrt{-1}$
$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Morphismus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to T\mathbb{S}^1$
$(z, t) \longmapsto (z, itz)$



$z^\perp = \{itz \mid t \in \mathbb{R}\}$

$(n=3)$ $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ reelle Quaternionen (Schiefkörper)

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} + j\mathbb{R} + k\mathbb{R}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \qquad \begin{aligned} ij &= k = -ji \\ jk &= i = -kj \\ ki &= j = -ik \end{aligned}$$

$$\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow T\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{H}$$

$$(u, (x,y,z)) \longmapsto (u, iux, juy, kuz)$$

$x, y, z \in \mathbb{R}$

$(n=7)$ $\mathbb{S}^7 \subseteq \mathbb{R}^8 = \mathbb{O}$ reelle Cayley-Algebra (Alternativkörper)

ähnlich

Ein (sehr tiefer) topologischer Satz von F. Adams sagt:
Für $n \neq 0, 1, 3, 7$ ist $T\mathbb{S}^n$ <u>nicht</u> trivial.

17. Lineare Algebra mit Vektorbündeln

(a) Sind $X \xrightarrow{\pi} B$ und $Y \xrightarrow{\rho} B$ Vektorbündel, so ist $X \oplus Y \xrightarrow{\tau} B$ definiert durch

$$X \oplus Y = \{ (x,y) \in X \times Y \mid \pi(x) = \rho(y) \} \xrightarrow{\tau} B$$

$\tau(x,y) = \pi(x) = \rho(y)$ $\rightsquigarrow$ $(X \oplus Y)_b = X_b \times Y_b$
mit der Vektorraumstruktur der direkten Summe

$$(x,y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in X_b \times Y_b \rightsquigarrow (x,y) +_b (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x +_b \tilde{x}, y +_b \tilde{y})$$

Das ist ein Vektorbündel über B, denn zu $b \in B$ gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq B$ von b,

$$h : X_V \to V \times \mathbb{R}^\ell \qquad x \mapsto (\pi(x), h_2(x))$$

$$k : Y_V \to V \times \mathbb{R}^m \qquad y \mapsto (\varrho(y), k_2(y))$$

wie in (VB2), damit

$$(X \oplus Y)_V \to V \times (\mathbb{R}^\ell \oplus \mathbb{R}^m)$$

$$(x,y) \longmapsto (\pi(x) = \varrho(y), h_2(x), k_2(y))$$

Man nennt $X \oplus Y$ die <u>Whitney-Summe</u> der Vektorbündel $X \xrightarrow{\pi} B$ und $Y \xrightarrow{\varrho} B$.

<u>Beispiel</u> Ist $L \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine eingeb. ℓ-dim. Umf, so gilt

$$TL \oplus \perp L \cong \underline{\mathbb{R}^m} = L \times \mathbb{R}^m \quad \text{(triviales Bündel)}$$

via $$T_u L \oplus \perp_u L \xrightarrow{\cong} \{u\} \times \mathbb{R}^m$$

$$((u,x),(u,y)) \longmapsto (u, x+y) \qquad \text{linear + bijektiv}$$

Für die n-Sphäre $\mathbb{S}^n = S^n_1$ erhalten wir also insbesondere

$$\underbrace{T\mathbb{S}^n}_{\substack{\text{nicht trivial} \\ \text{für } n \neq 0,1,3,7}} \oplus \underbrace{\perp \mathbb{S}^n}_{\substack{\text{trivial} \\ \text{1-dimensional}}} \cong \underbrace{\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}}_{\text{trivial}}$$

#

$\to$ topologische K-Theorie

(b) Sind $U, V \subseteq B$ offen und sind

$$h_U : X_U \to U \times \mathbb{R}^\ell \quad \text{sowie} \quad h_V : X_V \to V \times \mathbb{R}^\ell$$

wie in (VB2), so betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_{U\cap V} \arrow[r, "h_U", "\cong"'] \arrow[d, equal] & (U\cap V)\times\mathbb{R}^\ell \arrow[d, "\Phi_U^V", "\cong"'] \\ X_{U\cap V} \arrow[r, "\cong", "h_V"'] & (U\cap V)\times\mathbb{R}^\ell \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \Phi_U^V(u,x) = (u, g_u(x))$

$g_u(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar

$\rightsquigarrow$ stetige Abbildung $U\cap V \to GL_n\mathbb{R}$, $u \mapsto g_u$, die den Koordinatenwechsel garantiert,

$h_U(z) = (\pi(u), w)$ $\quad w \in \mathbb{R}^\ell$

$h_V(z) = (\pi(u), g_{\pi(u)}(w))$

[$\to$ Beschreibung von Vektorbündel durch Kozykel in $GL_n\mathbb{R}$]

(c) Das duale Vektorbündel

Sei $X \xrightarrow{\pi} B$ ein ℓ-dim. Vektorbündel. Für jedes $b \in B$ setze $X_b^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(X_b, \mathbb{R})$ (Dualraum von X_b),

$X^* = \bigcup_{b\in B} X_b^*$ $\quad \pi^* : X^* \to B$, $\pi(X_b^*) = \{b\}$

Ist $U \subseteq B$ offen und ist $h_U : X_U \to U \times \mathbb{R}^\ell$ wie in (VB2) so definieren wir $h_U^* : X_U^* \to U \times \mathbb{R}^\ell$ wie folgt:

$x \in X_b$, $h_U(x) = (\underbrace{\pi(x)}_{=b}, x_1, \dots, x_\ell)$

$\alpha \in X_b^*$ $\quad h_U^*(\alpha) = (\underbrace{\pi^*(\alpha)}_{=b}, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ $\qquad \alpha(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j x_j$

Ist $h_V : X_V \to V \times \mathbb{R}^\ell$ auch wie in (VB2), so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X^*_{U\cap V} \arrow[r, "h^*_U", "\cong"'] \arrow[d, equal] & (U\cap V)\times\mathbb{R}^\ell \arrow[d, "\varphi^V_U"] \\ X^*_{U\cap V} \arrow[r, "h^*_V", "\cong"'] & (U\cap V)\times\mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $\varphi(u,\alpha) = (u, g_u^T(\alpha))$ $\quad g_u \in GL_\ell\mathbb{R}$ wie in (b)

$\Rightarrow$ φ ist Homöomorphismus

Definiere jetzt eine Topologie auf X^* wie folgt:

$W \subseteq X^*$ offen $\overset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow}$ $h^*_U(W \cap X^*_U) \subseteq U \times \mathbb{R}^\ell$ offen für <u>jedes</u> h_U wie in VB2

Das ist eine Topologie und X^*_U ist offen in dieser Topologie (wegen dem Diagramm oben; φ^V_U ist Homöomorphismus), und π^* ist stetig.

Die Topologie ist Hausdorffsch, denn:

$\pi^*(x) \neq \pi^*(y)$ $\Rightarrow$ es gibt $U, V \subseteq B$ offen disjunkt mit $\pi^*(x) \in U$, $\pi^*(y) \in V$ $\Rightarrow$ X^*_U, X^*_V offen + disjunkt

$\pi^*(x) = \pi^*(y) \in U$ $\Rightarrow$ $X^*_U \cong U \times \mathbb{R}^\ell$ Hausdorffsch

$\Rightarrow$ $X^* \xrightarrow{\pi^*} B$ ist Vektorbündel. $\square$

Wir nennen es das <u>duale Bündel</u>,

(d) <u>Das Kotangentialbündel</u> Sei $U \subseteq E$ offen und sei $L \subseteq U$ eine eingeb. l-dim. Umf.

Das l-dimensionale Vektorbündel

$$T^*L = \bigcup_{b \in L} (T_b L)^*$$

heißt das <u>Kotangentialbündel</u> von L. Die Vektorfelder in T^*L heißen (stetig) <u>1-Formen</u> <u>auf L</u>. (Physik → Phasenraum)

<u>Beispiel</u> $F: U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar Funktion.

Betrachte die 1-Form

$$\alpha \in \Gamma(T^*L \to L) \qquad (b,v) \in T_b L$$

$$\alpha(b,v) = DF(b)(v) \in \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \alpha \text{ stetig 1-Form}$$

(denn: $DF(b): E \to \mathbb{R}$ linear)

Wir kommen darauf zurück.