§2. Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Mannigfaltigkeiten

1. <u>Def</u> Sei M ein Hausdorffraum. Wir nennen M eine <u>l-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit</u>, wenn es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $p \in U \subseteq M$ gibt, eine offene Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^l$, sowie einen <u>Homöomorphismus</u> $x: U \to U' \subseteq \mathbb{R}^l$, $x(u) = (x_1(u), \ldots, x_l(u))$. Wir nennen x <u>Karte</u> und die x_j <u>Koordinaten</u>.

<u>Bsp</u>
- Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^l$ ist eine topologische l-Mannigfaltigkeit
- Ist $U \subseteq E$ offen und ist $L \subseteq U$ eine eingebettete l-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so ist L eine l-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit (zB S_t^n ist top. n-Mannigfaltigkeit)
- ($\to$ GATG) Alexandrovs offene Halbgerade $L' = (\omega_1 \times [0,1)) - \{0,0\}$ ist (nicht metrisierbare, nicht separable) top. 1-Mannigfaltigkeit

- Sind $M_1, \dots, M_k$ topologische Mannigfaltigkeiten, so ist auch $M_1 \times \dots \times M_k$ eine topol. Mannigfaltigkeit.
- Ist M eine topologische ℓ-Mannigfaltigkeit und ist $W \subseteq M$ offen, so ist W eine top. ℓ-Mannigfaltigkeit.

2. Eigenschaften von top. Mannigfaltigkeiten

Sei M eine top. ℓ-Mannigfaltigkeit. Dann hat jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung, die zu $V = \{ x \in \mathbb{R}^\ell \mid \|x\|_2 < 1 \}$ homöomorph ist.

Folgerung: M ist lokal zusammenhängend, lokal wegzush. und lokal kompakt. Die Zusammenhangskomponenten von M stimmen mit den Wegzush.komponenten von M überein. Insbesondere sind in einer zush. top. Mannf. M zwei Punkte $p, q \in M$ stets durch einen Weg verbindbar.

Bem Für eine topologische Mannigfaltigkeit M sind äquivalent:

(i) M ist metrisierbar

(ii) jede Zusammenhangskomponente von M ist metrisierbar

(iii) jede Zusammenhangskomponente von M hat eine abzählbare Basis

Denn: (i) $\Rightarrow$ (ii): klar

(ii) $\Rightarrow$ (i): Seien $(M_j)_{j \in J}$ die Zusammenhangskomponenten von M, sei d_j eine Metrik auf M_j. Ersetze d_j durch die topologisch äquivalente Metrik $\bar{d}_j = \min\{d_j, 1\}$, definiere

$$d(x,y) = \begin{cases} d_j(x,y) & \text{wenn } x,y \in M_j \\ 1 & \text{wenn } x,y \text{ in verschiedenen Komponenten von } M \text{ liegen} \end{cases}$$

Da jedes M_j offen in M ist (siehe oben) ist das eine Metrik auf M, die die Topologie induziert

(iii) $\Leftrightarrow$ (ii): Spivak, Differential Geometry I, Appendix A, Thm 1

Alexandrovs offene Halbgerade ist ein Beispiel einer zush. top. 1-Mannigfaltigkeit, die diese Bedingungen nicht erfüllt

3. <u>Def</u> Sei M eine topologische l-Mannigfaltigkeit und seien $x: U \xrightarrow{\approx} U'$ sowie $y: V \xrightarrow{\approx} V'$ Karten ($U, V \subseteq M$ offen, $U', V' \subseteq \mathbb{R}^l$ offen, x, y Homöomorphismen). Sei $W = U \cap V$. Dann sind $x(W), y(W) \subseteq \mathbb{R}^l$ offen. Wir nennen x und y <u>verträglich</u>, wenn die Abbildung

$$x(W) \longrightarrow y(W), \quad p \longmapsto y(x^{-1}(p))$$

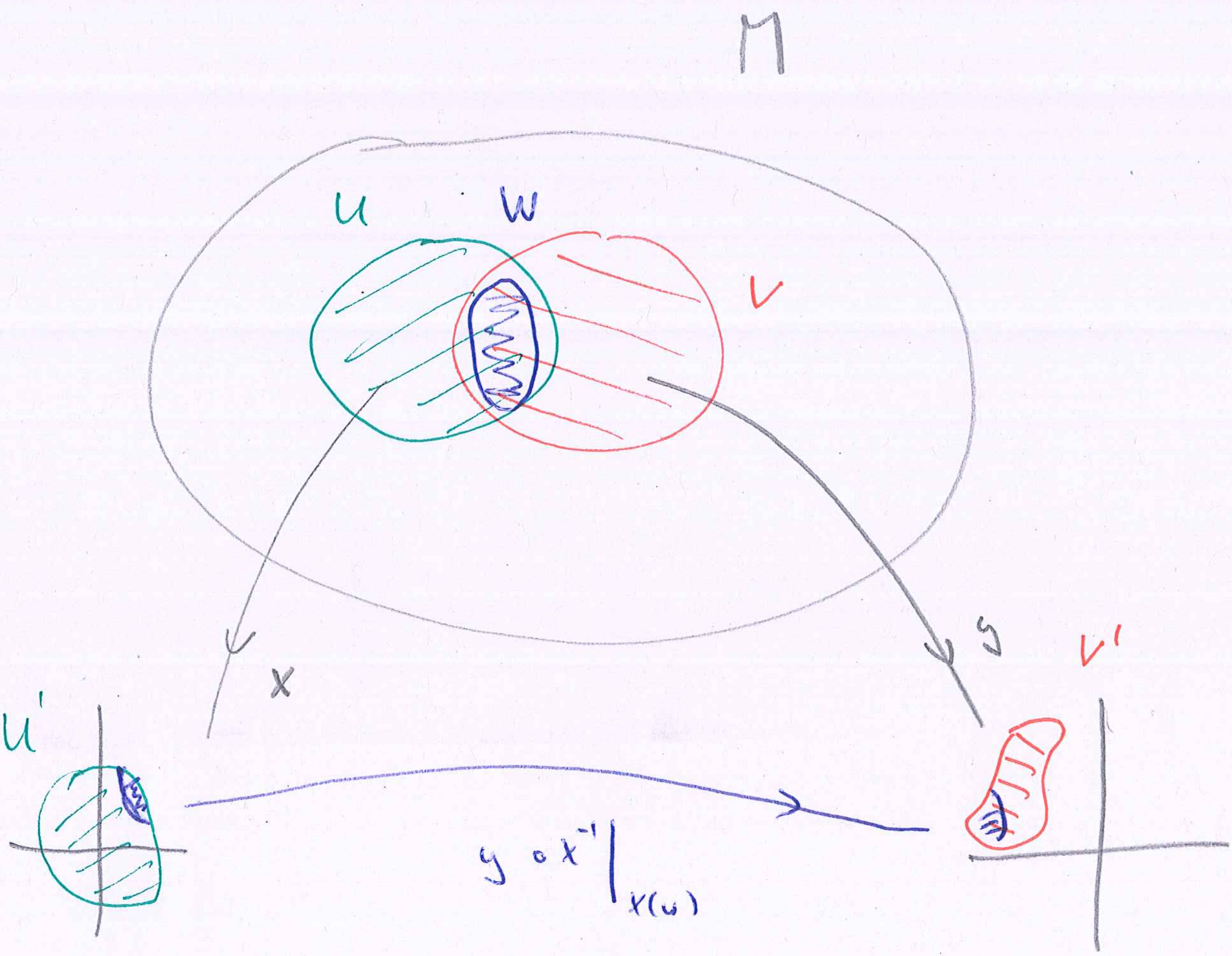
ein C^∞-Diffeomorphismus ist (mit Inversem $q \longmapsto x(y^{-1}(q))$). Für $W = \emptyset$ wird hier nichts verlangt.

Eine Menge A von Karten auf M heißt <u>Atlas</u>, wenn gilt:

(A1) alle Karten in A sind paarweise verträglich

(A2) zu jedem $p \in M$ gibt es mindestens eine Karte $x \in A$ mit p im Definitionsbereich.

Zwei Atlanten A_1, A_2 auf M heißen <u>verträglich</u>, wenn $A_1 \cup A_2$ wieder ein Atlas ist.


M
U
W
V
x
y
U'
V'
$y \circ x^{-1}|_{x(W)}$

4. <u>Lemma</u> Sei $\mathcal{A}$ ein Atlas auf M, sei

$$\hat{\mathcal{A}} = \{ x \mid x \text{ Karte auf } M \text{ und } x \text{ ist verträglich mit allen } z \in \mathcal{A} \} \supseteq \mathcal{A}.$$

Dann ist $\hat{\mathcal{A}}$ ein Atlas, der jeden mit $\mathcal{A}$ verträglichen Atlas enthält.

<u>Beweis</u> Wir müssen nur zeigen, dass $\hat{\mathcal{A}}$ (A1) erfüllt.

Sei $x, y \in \hat{\mathcal{A}}$, $x: U \xrightarrow{\cong} U'$, $y: V \xrightarrow{\cong} V'$, $W = U \cap V$.

Sei $w \in x(W)$, sei $p = x(w)$. Dann gibt es eine Karte $z \in \mathcal{A}$ mit p im Definitionsbereich. Nahe v gilt dann in $x(W)$, dass

$$y \circ x^{-1}(v) = \underbrace{y \circ z^{-1}}_{C^\infty} \circ \underbrace{z \circ x^{-1}}_{C^\infty}(v)$$

$\Rightarrow$ $y \circ x^{-1}$ ist in jedem $w \in x(W)$ C^∞, genauso

$x \circ y^{-1}$ $\square$

Wir nennen ein Atlas $\mathcal{A}$ <u>maximal</u>, wenn er jede Karte x, die mit allen Karten $z \in \mathcal{A}$ verträglich ist enthält. Das Lemma zeigt: jeder Atlas ist in genau einem maximalen Atlas enthalten

<u>Bem.</u> Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die keinen Atlas besitzen.

5. <u>Def.</u> Eine <u>differenzierbare l-Mannigfaltigkeit</u> $(M, \mathcal{A})$ besteht aus einer topologischen l-Mannigfaltigkeit M und einem maximalen Atlas $\mathcal{A}$ auf M. Man nennt $\mathcal{A}$ dann auch <u>differenzierbare Struktur</u> auf M. #

<u>Beispiel</u>

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^l$ offen, setze $\mathcal{A} = \{id_U\}$
  $\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}$ ist Atlas und $(U, \hat{\mathcal{A}})$ ist eine differenzierbare l-Mannigfaltigkeit
- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^l$ offen, sei $h : U \xrightarrow{\cong} V \subseteq \mathbb{R}^l$ ein Homöomorphismus, der nicht diffbar ist
  (z.B. $U = \mathbb{R} = V$, $h(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \geq 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{für } t < 0 \end{cases}$)
  Dann ist $\mathcal{B} = \{h\}$ ein Atlas, $(U, \hat{\mathcal{B}})$ ist eine differenzierbare l-Mannigfaltigkeit und
  $$\hat{\mathcal{A}} \neq \hat{\mathcal{B}}.$$

6. Sei E ein m-dimensionaler reeller Vektorraum, sei $U \subseteq E$ offen, sei $L \subseteq U$ eine l-dimens. eingeb. C^∞-Untermannigfaltigkeit.

Dann 'ist' L eine differenzierbare Mannigfaltigkeit wie folgt.

Für jedes $p \in L$ existiert eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von p, ein Diffeomorphismus $h : W \to W' \subseteq F$, ein l-dimensionaler Unterraum $H \subseteq F$ mit

$$h(L \cap W) = (h(p) + H) \cap W'.$$

Nach einer Translation um $-h(p)$ in F können wir OE annehmen, dass $h(p) = 0$. Durch Ergänzung einer Basis von H zu einer Basis von F können wir weiter annehmen, dass

$$F = \mathbb{R}^l \oplus \mathbb{R}^{m-l}$$
$$H = \mathbb{R}^l \oplus \{0\}$$
$$h(p) = (0,0)$$

$$h = (h_1, h_2)$$

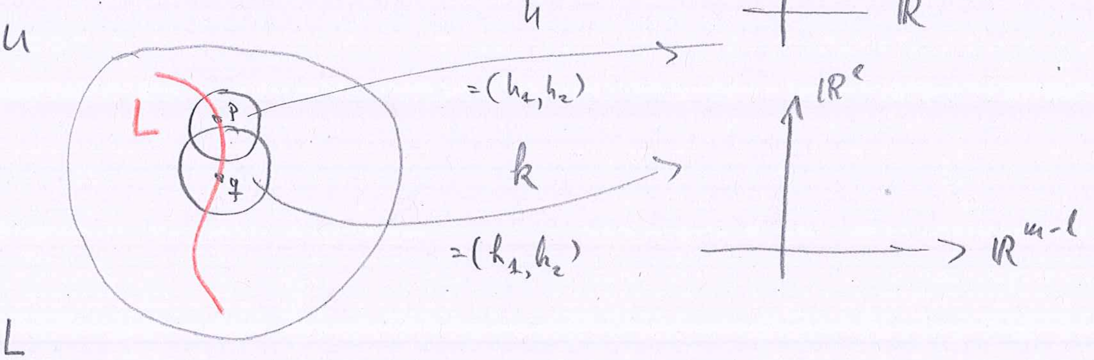
Wir setzen
$$x : V = L \cap W \to V' = x(L \cap W)$$
$$x(q) = h_1(q) \in \mathbb{R}^l$$

Die Abbildung x ist stetig, mit stetiger Inversen

$$V' \to V, \quad z \mapsto h^{-1}((z,0))$$

Wenn wir für jedes $p \in L$ solch ein x wählen, erhalten wir eine Menge A, die (A1) erfüllt.

Zu (A2).



$u \in L$

$x(u) = h_1(u)$ $\qquad$ $y(u) = k_1(u)$

$v \in \mathbb{R}^l$

$y \circ x^{-1}(v) = k_1(h^{-1}(v,0))$ ist C^∞-Abbildg $\square$

7. <u>Def</u> Seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ diff'bare Mannigfaltigkeiten. Eine stetige Abbildung $f: M \to N$ heißt <u>diff'bar</u> oder <u>glatt</u>, wenn für alle

$x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{B}$, $\quad x: U \xrightarrow{\cong} U' \subseteq \mathbb{R}^m$ $\qquad W = U \cap f^{-1}(V)$

$\qquad\qquad y: V \xrightarrow{\cong} V' \subseteq \mathbb{R}^n$

gilt: $y \circ f \circ x^{-1}: x(W) \to \mathbb{R}^n$ ist C^∞-Abbildg

(Fall $W = \emptyset$ wird nicht verlangt).

Mit anderen Worten: f ist in allen lokalen Koordinaten eine glatte Abbildung.

Wir setzen $C^\infty(M, N) = \{ f: M \to N \mid f \text{ glatt} \}$.

Insbesondere $C^\infty(M, \mathbb{R}) = \{ f: M \to \mathbb{R} \mid f \text{ glatt} \}$

Letzteres ist ein reeller Vektorraum und ein kommutativer Ring bezüglich $f \cdot g = [p \mapsto f(p) \cdot g(p)]$

Ist $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, so nennen wir $c \in C^\infty(J, M)$ eine <u>glatte Kurve</u> in M.

8. <u>Lemma</u> Seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ diff'bare Mannigfaltigkeiten, sei $f: M \to N$ eine stetige Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist diff'bar

(ii) Für jedes $p \in M$ gibt es eine Karte $x \in \mathcal{A}$ und $y \in \mathcal{B}$, mit $x: U \xrightarrow{\cong} U'$ $y: V \xrightarrow{\cong} V'$ mit $p \in U$, $f(p) \in V$ so, dass $y \circ f \circ x^{-1}$ glatt ist auf $x(U \cap f^{-1}(V))$

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar nach Definition.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sind $x, \tilde{x}$, $y, \tilde{y}$ Karten mit p im Definitionsbereich von $x, \tilde{x}$ und $f(p)$ im Definitionsbereich von $y, \tilde{y}$ und ist $y \circ f \circ x^{-1}$ glatt nahe $x(p) = w$, so ist $\tilde{y} \circ f \circ \tilde{x}^{-1} = \underbrace{\tilde{y} \circ y^{-1}}_{C^\infty} \circ \underbrace{y \circ f \circ x^{-1}}_{C^\infty} \circ \underbrace{x \circ \tilde{x}^{-1}}_{C^\infty}$

auch glatt nahe w $\square$

9. Sei $(M, \mathcal{A})$ eine

Konvention: ab jetzt schreiben wir statt $(M, \mathcal{A})$ einfach M. Eine Karte x auf M ist immer ein Element $x \in \mathcal{A}$, wenn nichts anderes gesagt wird

Wir wollen nun wie bei Untermannigfaltigkeiten Tangentialvektoren definieren. Das Problem ist aber, dass M nicht in einem umgebenden Vektorraum lebt. Wir stellen uns statt dessen Tangentialvektoren als gewisse Differentialoperatoren vor.

<u>Idee</u> $\quad L \underset{\text{Umf}}{\subseteq} U \underset{\text{off}}{\subseteq} \mathbb{R}^m$, $p \in L$, $c:(-\varepsilon,\varepsilon) \to L$

Kurve mit $c(0)=p$. Ist f glatte Funktion nahe p, so betrachte die reelle Zahl $\left.\dfrac{d}{dt} f(c(t))\right|_{t=0}$

Es gilt für f,g glatt nahe p

$$\left.\frac{d}{dt}\big(f(c(t))+g(c(t))\big)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} f(c(t))\right|_{t=0} + \left.\frac{d}{dt} g(c(t))\right|_{t=0}$$

(Linearität)

sowie

$$\left.\frac{d}{dt}\big(f(c(t))\cdot g(c(t))\big)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} f(c(t))\right|_{t=0}\cdot g(p) + f(p)\cdot\left.\frac{d}{dt} g(c(t))\right|_{t=0}$$

(Leibniz-Regel)

Zwei Kurven, die in $t=0$ den gleichen Geschwindigkeitsvektor haben, ergeben den gleichen Differentialoperator.

Jetzt setzen wir das um.

9. <u>Def</u> Sei M eine l-dimensionale diff'bare Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Wir setzen

$$\mathcal{U}_p = \{ U \subseteq M \mid U \text{ offen}, \ p \in U \}$$

Ist $U, V \in \mathcal{U}_p$ und sind $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, $g \in C^\infty(V, \mathbb{R})$

so sagen wir, dass f und g <u>gleich sind nahe p</u>, wenn es $W \in \mathcal{U}_p$ gibt mit $W \subseteq U \cap V$ und wenn $f|_W = g|_W$ gilt. Das ist eine Äquivalenzrelation auf $\bigcup_{U \in \mathcal{U}_p} C^\infty(U, \mathbb{R})$. Die Äquivalenzklasse von f schreiben wir als $\underline{f}$ und nennen sie den <u>Keim</u> (engl: germ) von f bei p. Wir können Keime addieren und multiplizieren via $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, $g \in C^\infty(V, \mathbb{R})$, $W = U \cap V$

$$\underline{f} + \underline{g} = \underline{f|_W + g|_W}$$

$$\underline{f} \cdot \underline{g} = \underline{f|_W \cdot g|_W}$$

Die Menge der Keime bei p ist damit ein <u>kommutativer Ring $\mathcal{O}_p$</u>. Wir setzen weiter $J_p = \{ \underline{f} \in \mathcal{O}_p \mid f(p) = 0 \}$

Dann ist J_p ein maximales Ideal in $\mathcal{O}_p$, nämlich der Kern der Abbildung

$$ev_p : \mathcal{O}_p \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \underline{f} \longmapsto f(p)$$

Wir setzen mit $J_p^2 = \left\{ \sum_{j=1}^{r} \underline{f_j\, g_j} \;\middle|\; \underline{f_j}, \underline{g_j} \in J_p, \; r \geq 1 \right\}$

<u>Idee</u>: J_p^2 sind die Keime der Funktionen, die in p eine Nullstelle 2. der Ordnung haben.

10. Wir definieren jetzt

$$T_p M = \{ X : \mathcal{O}_p \to \mathbb{R} \mid X \text{ ist lineare Derivation} \}$$

$X : \mathcal{O}_p \to \mathbb{R}$ ist <u>lineare Derivation</u>, wenn X lineare Abbildung von reellen Vektorräumen ist, und wenn für alle $\underline{f}, \underline{g} \in \mathcal{O}_p$ gilt

$$X(\underline{f} \cdot \underline{g}) = X(\underline{f}) \cdot g(p) + f(p) \cdot X(\underline{g})$$

(Leibnizregel)

Damit ist $T_p M$ ein reeller Vektorraum, der <u>Tangentialraum von M in p</u>.

<u>Beobachtung</u> Ist 1 die konstante Funktion $q \mapsto 1$ auf M, so folgt für $X \in T_pM$, dass

$$X(1) = X(1^2) = 1 \cdot X(1) + X(1) \cdot 1 = 2X(1) \Rightarrow X(1) = 0$$

$\Rightarrow$ X hat alle konstanten Funktionen im Kern.

<u>Lemma</u> Es gibt einen linearen Isomorphismus

$$T_pM \cong \mathrm{Hom}(J_p/J_p^2, \mathbb{R}) = (J_p/J_p^2)^*.$$

<u>Beweis</u> Ist $\underline{f}, \underline{g} \in J_p$, so folgt für $X \in T_pM$, dass $X(\underline{f} \cdot \underline{g}) = X(\underline{f}) \cdot \underbrace{g(p)}_{=0} + \underbrace{f(p)}_{=0} X(\underline{g}) = 0$

$\Rightarrow J_p^2 \subseteq \ker(X)$. Wir definieren eine lineare Abbildung

$$\alpha : T_pM \to (J_p/J_p^2)^*, \quad \alpha(X)(\underline{f} + J_p^2) = X(\underline{f})$$

sowie $\beta : (J_p/J_p^2)^* \to T_pM$ wie folgt. Für $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(J_p/J_p^2, \mathbb{R})$ und $\underline{f} \in \mathcal{O}_p$ setze

$$\beta(h)(\underline{f}) = h\Big(\underbrace{(\underline{f} - f(p))}_{\in J_p} + J_p^2\Big)$$

Dann ist $\beta(h)$ Derivation, denn

$$\beta(h)(\underline{f}\cdot\underline{g}) = h\left(\underline{f}\cdot\underline{g} - f(p)\cdot g(p) + J_p^2\right)$$

$$= h\Big(\underbrace{(\underline{f}-f(p))(\underline{g}-g(p))}_{\in J_p^2} + f(p)(\underline{g}-g(p)) + g(p)(\underline{f}-f(p)) + J_p^2\Big)$$

$$= h\left(f(p)(\underline{g}-g(p)) + g(p)(\underline{f}-f(p)) + J_p^2\right)$$

$$= f(p)\,\beta(h)(\underline{g}) + \beta(h)(\underline{f})\cdot g(p)\,.$$

Für $X \in T_pM$, $h \in \left(J_p/J_p^2\right)^*$, $g \in J_p$, $f \in \mathcal{O}_p$

erhält wir
$$\beta(\alpha(X))(\underline{f}) = X(\underline{f} - f(p)) = X(\underline{f})$$
$$\alpha(\beta(h))(\underline{g} + J_p^2) = h(\underline{g} + J_p^2)$$

$$\Rightarrow \quad \beta\circ\alpha = id_{T_pM} \qquad \alpha\circ\beta = id_{(J_p/J_p^2)^*}$$ $\square$

11. <u>Def</u> Sei $x\colon U \to U'$ eine Karte, $p \in U$, sei $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$. Wir definieren

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p = \frac{d}{dt}\Big(f(x^{-1}(v+te_i))\Big)\Big|_{t=0}$$

dabei ist $v = x(p)$ und $e_i \in \mathbb{R}^n$ der i-te Standard-Basisvektor, $e_i = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} - i$

Die Abbildung

$$\underline{f} \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p \quad \text{ist offensichtlich}$$

eine Derivation, die wir kurz schlicht als

Differential operator $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p : f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p$.

<u>Lemma</u> Die l Derivationen $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_l}\Big|_p$ sind linear unabhängig.

<u>Beweis</u> Angenommen, es gibt reelle Zahlen $c_1, \dots, c_l$ mit

$\sum_{i=1}^{l} c_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = 0$. Für die j-te Koordinatenfunktion

$x_j : U \to \mathbb{R}$ folgt $\sum_{i=1}^{l} c_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i}\Big|_p = c_j = 0$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_l = 0$ □

12. <u>Theorem</u> Ist x eine Karte, $x : U \to U'$ und ist $p \in U$, dann bilden die Derivationen $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_l}\Big|_p$ eine Basis von T_pM. Insbesondere ist $\dim(T_pM) = l$.

<u>Beweis</u> Ist h eine glatte Funktion auf einem ε-Ball um $0 \in \mathbb{R}^l$, so gilt die Taylor-Entwicklung,

$$h(v) = h(0) + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial h}{\partial x_i}(0) \cdot v_i$$

$$+ \sum_{j,k=1}^{l} v_j \cdot v_k \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 h(tv)}{\partial x_j \partial x_k} \, dt$$

$v = (v_1, \dots, v_l)$. Der Restterm der Taylorentwicklung liegt in J_0^2.

Es folgt auf M: jedes $\underline{f} \in J_p$ erfüllt die Gleichung

$$\underline{f} + J_p^2 = \sum_{i=1}^{l} (x_i - x_i(p)) \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p + J_p^2 ,$$

d.h. die l Elemente $\underbrace{(x_j - x_j(p))}_{\in J_p} + J_p^2$ spannen J_p/J_p^2 auf und $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_l}\Big|_p$ ist die duale Basis für $\left(J_p/J_p^2\right)^*$ □

Fazit: jedes $X \in T_pM$ hat eine eindeutige Darstellung

$$X = \sum_{j=1}^{l} c_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \qquad c_1, \dots, c_l \in \mathbb{R}$$

<u>Korollar</u> Sind $x: U \to U'$ und $z: V \to V'$ Karten auf M mit $p \in U \cap V$, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\Big|_p = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial x_k}{\partial z_j}\Big|_p \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p$$

Beweis: Für $i = 1, \dots, \ell$ betrachte die Koordinatenfunktion $x_i : U \cap V \to \mathbb{R}$. Es folgt

$$\sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial x_k}{\partial z_j}\Big|_p \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} x_i \Big|_p}_{= \delta_{ik}} = \frac{\partial x_i}{\partial z_j}\Big|_p \qquad \square$$

Die Matrix $g(p) \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ mit den Einträgen $\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_j}\Big|_p \right)_{ij}$ beschreibt also den Basiswechsel von der Basis $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z_\ell}\Big|_p \right\}$ zur Basis $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\Big|_p \right\}$.

Es folgt $g \in GL_\ell(\mathbb{R})$, die Matrix ist invertierbar. Nach Konstruktion sind die Matrixeinträge von g glatte Funktionen in p, d.h. die Abbildung

$$U \cap V \to GL_\ell(\mathbb{R}) \quad , \; p \longmapsto g(p) \quad \text{ist glatt.}$$

13. Das Tangentialbündel Sei $(M, \mathcal{A})$ eine glatte ℓ-Mannigf.

Für $x \in \hat{\mathcal{A}}$, $x : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^\ell$ definieren wir

$$(TM)_U = \bigcup_{p \in U} T_p M \qquad \text{sowie}$$

$$Dx : (TM)_U \longrightarrow U' \times \mathbb{R}^\ell$$

$$Dx\left(\sum_{j=1}^{l} c_j(p)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) = (x(p), c_1(p), \dots, c_l(p)) = (p, c(p))$$

Ist $z: V \to V'$ eine weitere Karte in $\mathcal{A}$, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(TM)_{U \cap V} \arrow[r, "Dx", "\text{bij}"'] \arrow[d, equal] & x(U \cap V) \times \mathbb{R}^l \\
(TM)_{U \cap V} \arrow[r, "Dz", "\text{bij}"'] & z(U \cap V) \times \mathbb{R}^l \arrow[u, "\Phi"']
\end{tikzcd}$$

$$\Phi(p, v) = (z^{-1}(x(p)), g(p)(v)) \qquad g(p) \in GL_l\mathbb{R}$$

g hängt diff'bar von p ab.

Wir setzen $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ und definieren eine Topologie auf TM wie folgt: $W \subseteq TM$ ist offen genau dann wenn für jedes $x \in \mathcal{A}$, $x: U \to U' \subseteq \mathbb{R}^l$ die Menge $Dx((TM)_U \cap W) \subseteq x(U) \times \mathbb{R}^l$ offen ist.

Damit ist TM eine $2l$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und

$\{Dx \mid x \in \mathcal{A}\}$ ist ein Atlas auf TM

(Die Hausdorff-Eigenschaft für TM zeigt man genau wie in §1.17 (c)). Weiter ist

$$TM \xrightarrow{\pi} M, \quad \pi^{-1}(p) = T_pM$$

ein l-dimensionales Vektorbündel, das Tangentialbündel von M. Einen glatten Schnitt

$$s : M \to TM$$

nennt man ein (tangentiales)(glattes) Vektorfeld auf M.

14. Die Ableitung. Angenommen, $f : M \to N$ ist eine diff'bare Abbildung zwischen diff'baren Mannigfaltigkeiten M, N. Für $p \in M$ und $v \in T_pM$, $\underline{h} \in \mathcal{O}_{f(p)}$ definieren wir

$$Df(p)(v)(\underline{h}) = v(\underline{h \circ f}) \qquad (\underline{h \circ f} \in \mathcal{O}_p)$$

$\Rightarrow$ $Df(p)(v) \in T_{f(p)}N$ ist Derivation, denn

$$v(\underline{h \circ f} \cdot \underline{g \circ f}) = v(\underline{h \circ f}) \cdot (g \circ f)(p) + (h \circ f)(p)\, v(\underline{g \circ f})$$

$$= Df(p)(v)(\underline{h}) \cdot g(f(p)) + h(f(p)) \cdot Df(p)(\underline{g})$$

$$v(\underbrace{\underline{h \circ f} + \underline{g \circ f}}_{= \underline{(h+g) \circ f}}) = v(\underline{h \circ f}) + v(\underline{g \circ f})$$

Wir erhalten also für jedes $p \in M$ eine lineare Abbildung $Df(p): T_pM \to T_{f(p)}N$.

Sind $x: U \to U' \subseteq \mathbb{R}^m$ und $y: V \to V' \subseteq \mathbb{R}^n$ Karten auf M bzw. N mit $p \in U$, $f(p) \in V$, so gilt

$$Df(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i}\Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{f(p)}.$$

#

Denn: für die Koordinate y_k gilt

$$Df(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)(y_k) = \frac{\partial}{\partial x_i}(y_k \circ f)\Big|_p \qquad (LS)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i}\Big|_p \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_j} y_k\Big|_{f(p)}}_{=\delta_{jk}} = \frac{\partial(y_k \circ f)}{\partial x_i}\Big|_p \qquad (RS)$$

Die Matrix mit den Einträgen $\left(\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}\Big|_p\right)$ beschreibt also die lineare Abbildung $Df(p)$ bezüglich der Basen $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_p$ und $\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{f(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\Big|_{f(p)}$.

Da die Matrix auf der offenen Menge $U \cap f^{-1}(V) \subseteq M$ glatt von p abhängt, folgt:

<u>Lemma</u> Wenn $f: M \to N$ diff'bar ist, so ist auch die Abbildung

$$DF: TM \to TN$$
$$T_pM \ni v \longmapsto Df(p)(v)$$

diff'bar. $\square$

<u>Bem</u> Es ist nicht schwierig nach zu prüfen, dass das in § 1.14 definierte Tangentialbündel einer eingebetteten Untermannigfaltigkeit isomorph und diffeomorph zum hier abstrakt definierten Tangentialbündel ist (benutze die Karten aus § 2.6)

15. <u>Die Liealgebra der glatten Vektorfelder.</u>

Sei M eine diff'bare l-Mannigfaltigkeit. Wir schreiben $\Gamma^\infty(TM \xrightarrow{\pi} M)$ für die Menge aller glatten (tangentialen Vektorfelder $X: M \to TM$

Γ d.h. $X: M \to TM$ <u>glatt</u> und für jedes $p \in M$ gilt $X_p \in T_pM$. $\lrcorner$

Dann ist $\Gamma^\infty(TM \to M)$ ein reeller Vektorraum und ein Modul über $C^\infty(M,\mathbb{R})$ via

$$(f,X) \longmapsto fX = [\, p \mapsto \underbrace{f(p)}_{\text{Zahl}}\underbrace{X_p}_{\text{Vektor}} \,].$$

Ist $X \in \Gamma^\infty(TM \to M)$ und $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, so ist für jedes $p \in M$ $X_p(f) \in \mathbb{R}$, also ist

$$X(f) : p \longmapsto X_p(f) \quad \text{eine reelle Funktion auf } M.$$

In lokalen Koordinaten ist $X_p = \sum_{j=1}^{l} c_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$, $c_j \in C^\infty(U,\mathbb{R})$
$x : U \to U'$

$$\Rightarrow X_p(f) = \sum_{j=1}^{l} c_j(p) \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_p \quad \text{ist glatt}$$

$$\Rightarrow X(f) \in C^\infty(M,\mathbb{R})$$

(Es macht also einen Unterschied, ob f links oder rechts von X steht, $fX \in \Gamma^\infty(TM \to M)$, $X(f) \in C^\infty(M,\mathbb{R})$.)

<u>Lemma</u> Seien $X, Y \in \Gamma^\infty(TM \to M)$.
Für $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ definieren wir

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Dann ist $[X,Y] \in \Gamma^\infty(TM \to M)$. Weiter gilt

$[X,X] = 0$ (also $[X,Y] = -[Y,X]$) sowie

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

<u>Bew:</u> X und Y sind lineare Differentialoperatoren $C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R}) \Rightarrow XY$ und YX sind L.D.
$\Rightarrow [X,Y] : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ ist linear. Zu zeigen: $[X,Y]$ ist in jedem Punkt $p \in M$ eine Derivation.

Sei $f, g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Es folgt

$$Y(X(f\cdot g)) = Y(\, g X(f) + f X(g))$$
$$= \underbrace{Y(g)\cdot X(f)}_{} + g\cdot Y(X(f)) + \underbrace{Y(f)\cdot X(g)}_{} + f\cdot Y(X(g))$$

$\Rightarrow [X,Y](f\cdot g) = g\,[X,Y](f) + f\,[X,Y](g).$ $\square$

Die restlichen Behauptungen sind klar.

<u>Def:</u> Eine <u>Lie algebra</u> $(V,[\,,\,])$ besteht aus einem Vektorraum V, einer bilinearen Abbildung $[\,,\,]: V\times V \to V$ so, dass

- $[X,X] = 0$ für alle $X \in V$
  ($\Rightarrow [X,Y] + [Y,X] = 0$, betrachte $0 = [X+Y, X+Y] = [X,Y] + [Y,X]$)
- $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$
  (Jacobi-Identität)

Also bildet $(\Gamma^\infty(TM\to M), [\,,\,])$ eine (im allgemeinen unendlich dimensionale) Lie algebra.

<u>Bem</u> Sind X, Y glatte Vektorfelder, so ist XY im allgemeinen <u>kein</u> glattes Vektorfeld. Die Abbildung $f \mapsto X(Y(f))(p)$ ist linear, aber i.a. keine Derivation.

<u>Bsp</u> $M = \mathbb{R}$, $X_p = Y_p = \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p$ $\quad f(p) = p^2$

$$XX(f^2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(p^4) = 12\, p^2$$

$$2f\, XX(f) = 2p^2 \cdot 2 = 4p^2 \qquad \square$$

16. <u>Der Fluss eines Vektorfeldes</u>

Sei M eine diff'bare ℓ-Mannigfaltigkeit, sei $J \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $c : J \to M$ glatte Kurve. Für jedes $s \in J$ und $p = c(s)$ ist $f \mapsto \frac{d}{dt} f(c(t))\Big|_{t=s}$ eine Derivation, also ein Vektor in T_pM, den wir mit $\dot{c}(s) \in T_{c(s)}M$ bezeichnen (der Geschwindigkeitsvektor von c zur Zeit s).

Damit ist $\dot{c} : J \to TM$ eine glatte Kurve im Tangentialbündel

$$\begin{tikzcd}
 & TM \arrow[d, "\pi"] \\
J \arrow[ur, "\dot{c}"] \arrow[r, "c"'] & M
\end{tikzcd}$$

Angenommen, $X \in \Gamma^\infty(TM \to M)$ ist ein glattes Vektorfeld. Wir nennen c eine <u>Integralkurve</u> von X, wenn für jedes $s \in J$ gilt $\dot{c}(s) = X_{c(s)}$

d.h. wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & TM \\ J \arrow[ur, "\dot c"] \arrow[r, "c"'] & M \arrow[u, "X"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Sei nun $X \in \Gamma^\infty(TM \to M)$ vorgegeben. Zu jedem $p \in M$ ist gesucht eine Integralkurve $c : J \to M$, mit $0 \in J$ und $c(0) = p$, $\dot c(s) = X_{c(s)}$.

Das ist eine gewöhnliche DGL erster Ordnung:

$$\boxed{\dot c(s) = X_{c(s)} \qquad c(0) = p}$$

In lokalen Koordinaten $x : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^\ell$ um p:

$$Dx(X_q) = (x(q), v_1(q), \dots, v_\ell(q))$$

$$Dx(X_{c(s)}) = (x(c(s)), v_1(c(s)), \dots, v_\ell(c(s)))$$

$$x(c(s)) = (c_1(s), \dots, c_\ell(s))$$

$$Dx(\dot c(s)) = (x(c(s)), c_1'(s), \dots, c_\ell'(s))$$

DGL $\quad c_j'(s) = v_j(c(s)) \qquad j = 1, \dots, \ell$

Anfangswert: $c(0) = p$

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche DGL (in $\mathbb{R}^d$) liefert:

<u>Theorem</u> Sei X ein glattes Vektorfeld, sei $p \in M$. Dann gibt es ein offenes Intervall $J_p \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in J_p$ sowie eine Integralkurve $c_p = c : J_p \to M$ zu X mit $c(0) = p$. Jede andere Integralkurve $\tilde{c}$ mit $\tilde{c}(0) = p$ ist eine Einschränkung von c auf ein Teilintervall $I \subseteq J_p$.

(Warner, 1.48 (1)).

Wir setzen $\Omega = \{ (p,t) \in M \times \mathbb{R} \mid t \in J_p \}$.

Für $p \in M$ und $t \in J_p$ setzen wir

$$\Phi_t(p) = c_p(t)$$

↑ eindeutige Integralkurve zur Anfangsbed. $c_p(0) = p \leadsto \Phi_0(p) = p$

Dann gilt:

(1) $\Omega \subseteq M \times \mathbb{R}$ ist offen

(2) $\Phi : \Omega \to M$ ist glatt

(3) Wenn $q = \Phi_s(p)$ und $\Phi_t(q)$ definiert sind, so gilt

$$\Phi_{t+s}(p) = \Phi_t(\Phi_s(p))$$

Falls für alle $p \in M$ gilt $J_p = \mathbb{R}$, so heißt X <u>vollständig</u>. Man nennt Φ den von X erzeugten <u>Fluss</u>.

Zum Beweis vergleiche Warner, Thm 1.48. #

<u>Bsp</u> $M = \mathbb{R}$ $\quad X_p = p^3 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p$
$x = id_{\mathbb{R}}$

DGL $\quad c'(t) = c(t)^3 \qquad c(0) = p$

<u>Ansatz</u> $\frac{dc}{dt} = c^3 \qquad \frac{dc}{c^3} = dt \quad$ integrieren

$$\int_p^c \frac{1}{y^3}\,dy = \int_0^t dt = t \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{c^2}\right) = t$$

$c(t) = 0$ falls $p = 0$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{p^2}{\sqrt{1-2tp^2}} \qquad c(t) \overset{?}{=} \frac{p}{\sqrt{1-2tp^2}} = p\,(1-2tp^2)^{-\frac{1}{2}}$$

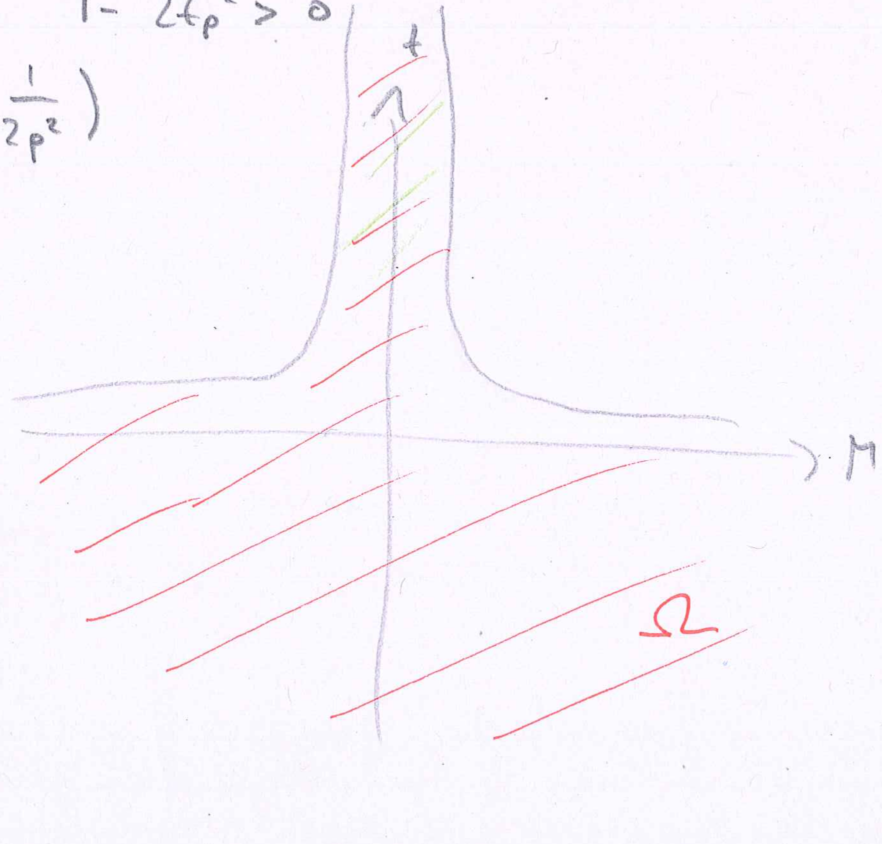
<u>Check</u>: $c(0) = p$ (✓) $\qquad c'(t) = p\left(-\frac{1}{2}\right)(1-2tp^2)^{-\frac{3}{2}}(-2p^2)$
$$= p^3(1-2tp^2)^{-\frac{3}{2}} = c(t)^2 \text{ (✓)}$$

Lösungsintervall: $\quad 1 - 2tp^2 > 0$

$J_p = \left(-\infty, \frac{1}{2p^2}\right)$

für $p \neq 0$

$J_0 = \mathbb{R}$



17. **Def** Ein Vektorfeld $X \in \Gamma^\infty(TM \to M)$ hat <u>kompakten Träger</u>, wenn die Menge

$$A = \{p \in M \mid X_p \neq 0\} \subseteq M$$ kompakt ist.

Ist M selber kompakt, so hat also jedes $X \in \Gamma^\infty(TM \to M)$ kompakten Träger.

<u>Satz</u> Jedes Vektorfeld mit kompaktem Träger ist vollständig.

<u>Beweis</u> Da A kompakt ist, gibt es $V_1, V_2, \dots, V_k \subseteq M$ offen mit $A \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_k$ und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k > 0$ $V_j \times (-\varepsilon_k, \varepsilon_k) \subseteq \Omega$ gilt, $k = 1, \dots, k$. Setze $V_0 = M - A$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k\}$.

Sei $p \in M$. <u>Zz: $J_p = \mathbb{R}$.</u> Angenommen, J_p hat eine kleinste obere Schranke $r = \sup(J_p) < \infty$.

Sei $c : J_p \to M$ Integralkurve, $c(0) = p$. Dann gilt $q = c(r - \varepsilon/2) \in V_j$ für ein $0 \le j \le k$. Aber dann ist

$$\tilde{c}(t) = \begin{cases} c(t) & \text{falls } t \le r - \frac{\varepsilon}{2} \\ \Phi_{t - r + \frac{\varepsilon}{2}}(q) & \text{falls } r - \frac{\varepsilon}{2} < t < r + \varepsilon/2 \end{cases}$$

eine Integralkurve ↯

Genauso hat J_p keine größte untere Schranke. $\square$

18. Das Kotangentialbündel Sei M eine diff'bare l-dimensionale Mannigfaltigkeit. Für $p \in M$ setze $T_p^*M = \mathrm{Hom}(T_pM, \mathbb{R})$ (Dualraum von T_pM) sowie $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$, vgl. §1.17 (d)

Dann ist $T^*M \to M$ ein l-dimensionales Vektorbündel. Ist $x : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^l$ eine Karte auf M, $p \in U$, so sei $dx_j(p)$ der duale Vektor zu $\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$ d.h. $dx_j(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p\right) = \delta_{jk}$.

Damit ist $dx_1(p), \dots, dx_l(p)$ eine Basis von T_p^*M

Damit erhalten wir Karten

$$(T^*M)_U \longrightarrow U' \times \mathbb{R}^l$$

$$\sum_{j=1}^{l} c_j(p)\, dx_j(p) \longmapsto (x(u), c_1(p), \dots, c_l(p))$$

Wie in §2.13 zeigt man, dass die Karten auf T^*M verträglich sind. Damit wird T^*M eine diff'bare $2l$-Mannigfaltigkeit.

Die glatten Vektorfelder in

$\Gamma^\infty(T^*M \to M)$ nennt man

oder Differentialform

1-Formen auf M. In lokalen Koordinaten $x: U \to U'$ lässt sich jede 1-Form also darstellen als

$$\eta(p) = \sum_{j=1}^{l} c_j(p)\, dx_j(p)$$

oder kurz: $\eta = \sum_{j=1}^{l} c_j\, dx_j$

Ist $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, so ist für jedes $p \in M$ die Abbildung $T_pM \to \mathbb{R}$, $X \mapsto X(f)$ linear.

Wir bezeichnen diese Abbildung mit $df(p): T_pM \to \mathbb{R}$ und nennen sie das Differential von f in p.

In lokalen Koordinaten $x: U \to U'$ folgt:

$$df(p) = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_p dx_j(p) \quad \text{, kurz} \quad df = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

$\ulcorner$ denn: LS: $df(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p\right) \overset{\text{DEF}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_p$

RS: $\sum_{j=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_p \underbrace{dx_j(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p\right)}_{=\delta_{jk}} = \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_p$ $\lrcorner$

19. Tensoren und Tensorprodukt

Seien E, F Vektorräume (über einem Körper k, z.B. $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$). Ein Tensorprodukt von E und F besteht aus einem Vektorraum T (dem Tensorprodukt von E und F) und einer bilinearen Abbildung $\beta : E \times F \to T$ mit folgender universeller Eigenschaft: Ist H ein Vektorraum und ist $h : E \times F \to H$ bilinear, so gibt es genau eine lineare Abbildung $\tilde{h} : T \to H$ so, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, "h"] & \\ T \arrow[r, "\tilde{h}"] & H \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Aus der universellen Eigenschaft folgt sofort: das Tensorprodukt ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Man schreibt $T = E \otimes F$ sowie $\beta(u,v) = u \otimes v \in E \otimes F$ für $u \in E$, $v \in F$.

Wir verifizieren die Existenz von T wie folgt.

Sei $\{u_i \mid i \in I\}$ und $\{v_j \mid j \in J\}$ Basen für E und F. Sei T der Vektorraum mit der Basis $\{(i,j) \mid i \in I, j \in J\} = I \times J$. Elemente von T sind also *endliche* formale Linearkombinationen

$$t = \sum_{i,j} r_{ij}(i,j) \qquad r_{ij} \in \mathbb{R}$$

Definiere $p(u_i, v_j) = 1 \cdot (i,j)$ und setze p bilinear fort. Für jedes $h : E \times F \to H$ setze $\tilde{h}(1(i,j)) = h(u_i, v_j)$. Damit ist die universelle Eigenschaft für $E \times F \xrightarrow{p} T$ erfüllt.

Beispiel $E = \mathbb{R}^m$ (Spaltenvektoren)

$F = \mathbb{R}^n$ (")

$$E \otimes F \cong \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\beta(v,w) = p\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}\right) = v \cdot w^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

↑ Matrizenprodukt

Achtung: Elemente von $E \otimes F$ sind *endliche Linearkombinationen* von Elementen der Form $u \otimes v$ mit $u \in E$, $v \in F$. Nicht jedes $t \in E \otimes F$ läßt sich als $t = u \otimes v$ schreiben!

Eigenschaft von Tensorprodukte

(a) Es gilt stets $E \otimes F \cong F \otimes E$ sowie

$(E \otimes F) \otimes H \cong E \otimes (F \otimes H)$ und

$E \otimes (F \oplus H) \cong (E \otimes F) \oplus (E \otimes H)$

$E \otimes k \cong E$

$$\mathrm{Hom}_k(E \otimes F, H) \cong \underbrace{\mathrm{Hom}_k(E, \mathrm{Hom}_k(F, H))}_{= \text{ bilin. Abb. } E \times F \to H}$$ #

(b) Wenn E, F endliche Dimension haben, gilt

$(E \otimes F)^* \cong E^* \otimes F^*$. Insbesondere

$$E^* \otimes E^* \cong (E \otimes E)^* \cong \mathrm{Hom}_k(E, E^*)$$

$$(\xi \otimes \eta) \longmapsto [u \mapsto \xi(u)\, \eta(\cdot)]$$

sowie wegen $F^{**} = F$

$$\mathrm{Hom}_k(E, F) = \mathrm{Hom}_k(E, F^{**}) = \mathrm{Hom}_k(E, \mathrm{Hom}_k(F^*, k))$$

$$\cong \mathrm{Hom}(E \otimes F^*, k) \cong E^* \otimes F$$

explizit: $E^* \otimes F \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_k(E, F)$

$$\xi \otimes v \longmapsto [u \mapsto \xi(u) v]$$

Wenn $X \xrightarrow{\pi} B$ und $Y \xrightarrow{\varrho} B$ Vektorbündel sind, kann man ein neues Vektorbündel $X \otimes Y \to B$ konstruieren, das <u>Tensorprodukt</u> der beiden Vektorbündel. Man setzt

$$(X \otimes Y)_b = X_b \otimes Y_b \to \{b\}$$

Sind $h: X_U \to U \times \mathbb{R}^l$

$\quad k: Y_U \to U \times \mathbb{R}^m$

wie in §1.13 (VB2), so erhalten wir

$$(X \otimes Y)_U \to U \times \mathbb{R}^l \otimes \mathbb{R}^m = U \times \mathbb{R}^{l \times m}$$

$$(x \otimes y)_b \longmapsto \big(b = \pi(x) = \varrho(y),\ \underbrace{(h_i(x)\, k_j(y))_{i,j}}_{\in \mathbb{R}^{l \times m}}\big)$$

damit Topologie auf $X \otimes Y$ wie in §1.17 (c).

20. <u>Def</u> Sei M eine differenzierbare l-Mannigfaltigkeit. Eine <u>Riemannsche Metrik</u> g ordnet jedem $p \in M$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ zu so, dass für jede Karte $x: U \to U' \subseteq \mathbb{R}^l$ die Abbildungen

$$g_{ij,p} = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) \quad \text{\underline{glatt} sind.}$$

$U \to \mathbb{R}$

Also:

$$\left.\begin{array}{l} g_{ij,p} = g_{ji,p} \\ \sum\limits_{i,j=1}^{l} v_i v_j \, g_{ij,p} \geq 0 \\ \sum\limits_{i,j=1}^{l} v_i v_j \, g_{ij,p} = 0 \Leftrightarrow v = 0 \end{array}\right\} \text{ für alle } p \in U, \; v \in \mathbb{R}^l$$

Invariante Formulierung mit Tensorprodukten:

g ist ein glatter Schnitt

$$g : M \longrightarrow T^*M \otimes T^*M$$

der in jedem $p \in M$ symmetrisch und positiv definit ist.

In lokalen Koordinaten also

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} \, dx_i \otimes dx_j$$

Das Paar (M, g) heißt dann Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Für $X_p, Y_p \in T_pM$ schreibt man kurz

$$g_p(X_p, Y_p) = \langle X_p, Y_p \rangle_p$$

<u>Beispiel</u> $U \subseteq \mathbb{R}^\ell$ offen, $L \subseteq U$ eingebettet Umf (zB $L = U$), $p \in L$. Für

$$(p,u), (p,v) \in T_pM \qquad (\text{also } p \in L,\ u,v \in \mathbb{R}^\ell)$$

setze
$$g((p,u),(p,v)) = \sum_{j=1}^{\ell} u_j v_j$$

Dann ist (L,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

21. <u>Beobachtung</u> Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(a) Ist $X \in T_pM$, so ist die Abbildung

$$T_pM \to \mathbb{R},\quad Y \mapsto g(X,Y)$$ linear, also ein Element von T_p^*M. Die Abbildung

$$T_pM \to T_p^*M,\quad X \mapsto g(X,-)$$ ist ein linearer Isomorphismus.

(b) Es folgt: die Vektorbündel T^*M und TM sind kanonisch isomorph.

(c) Für (a) und (b) ist nur relevant, dass g <u>nicht ausgeartet</u> ist (d.h. $\det(g_{ij}) \neq 0$).
Dass g positiv definit ist, wird nicht benötigt

→ Allgemeine Relativitätstheorie

→ O'Neill