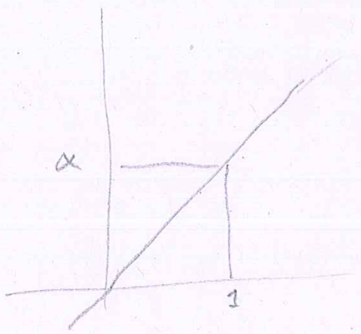
§4 Untermannigfaltigkeiten und Krümmung

1. **Def** Sei $h : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten M, N. Wir nennen h eine Immersion, falls für jedes $p \in M$ die Ableitung $Dh(p) : T_pM \longrightarrow T_{h(p)}N$ injektiv ist.

Falls h injektiv ist und ein Homöomorphismus auf $h(M)$ ist, so heißt h Einbettung.

(*) Ist $M \subseteq N$ und h Einbettung (Inklusion), so

Beispiele (a) $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, \alpha t)$ ist Einbettung (für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$).



Betrachte die glatte Abbildung

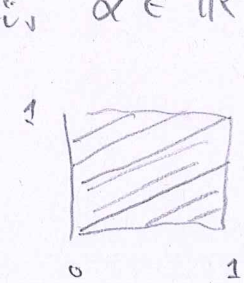
$$F : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$$
$$(s,t) \mapsto (\exp(2\pi i s), \exp(2\pi i t))$$

und die Hintereinanderausführung

$$h = F \circ f_\alpha : t \longmapsto (\exp(2\pi i t), \exp(2\pi i \alpha t))$$

Es gilt: h ist injektiv $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Für $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ist $h(\mathbb{R})$ dicht in $S^1 \times S^1$



$\longrightarrow S^1 \times S^1$ ⇝ keine Einbettung.

(*) ist $M \subseteq N$ und ist die Inklusionsabbildung eine Einbettung, so heißt $M \subseteq N$ eingebettete Untermannigfaltigkeit (-> Kapitel 1)

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} = 1,2$

$\mathbb{KP}^m =$ $\mathbb{S}^{d(m+1)-1} \subseteq \mathbb{K}^{m+1}$ Einheitssphäre

$U = \{ z \in \mathbb{K} \mid |z| = 1 \}$. Setze $u \sim v$ für $u, v \in \mathbb{S}^{d(m+1)-1}$ falls $v = zu$ für ein $z \in U$.

Hopf-Faserung

$$\mathbb{KP}^m = \mathbb{S}^{d(m+1)+1} / \sim$$

$$u \mapsto [u] \in \mathbb{KP}^m$$

m-dimensionaler Projektiver Raum über $\mathbb{K}$

$m+1$ verträgliche Karten $U_j \to \mathbb{K}^m$

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{j-1} \\ u_j \\ u_{j+1} \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \longmapsto u_j^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{j-1} \\ u_{j+1} \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \qquad U_j = \{ [u] \mid u_j \neq 0 \}$$

$j = 0, \dots, m$

Betrachte nun $g : \mathbb{S}^{d(m+1)-1} \to \mathbb{K}^{(m+1)\times(m+1)}$

$$u \longmapsto u \cdot \bar{u}^T \quad (u \text{ Spaltenvektor})$$

$$(u_i)_{i=0}^m \longmapsto (u_i \bar{u}_j)_{i,j=0}^m$$

Dann faktorisiert g durch einen Homöomorphismus aufs Bild

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{d(m+1)+1} \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "{[\,]}"'] & & \mathbb{K}^{(m+1)\times(m+1)} \\ & \mathbb{KP}^m \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

$\leftarrow$ Immersion

denn: $g(u) = g(v) \iff u \sim v$

Man nennt $h : \mathbb{KP}^m \to \mathbb{K}^{(m+1)\times(m+1)}$ die

<u>Veronese-Einbettung</u> von $\mathbb{KP}^m$. $\to$ ÜA

2. **Lemma** Sei $h: M \to N$ eine Immersion, sei $p \in N$. Dann gibt es Karten $x: U \to U' \subseteq \mathbb{R}^m$, $y: V \to V' \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x(p) = 0$, $y(h(p)) = 0$ und $y \circ h \circ x^{-1}(u_1, \dots, u_m) = (u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0)$

Beweis Sei x Karte nahe p mit $x(p) = 0$ und z Karte nahe $h(p)$ mit $z(h(p)) = 0$. Betrachte

$F = z \circ h \circ x^{-1}: W \to \mathbb{R}^n$ $\quad W \subseteq \mathbb{R}^m$ offen

$F(0) = 0$, $\quad DF(0)(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathbb{R}^n$ linearer Unterraum der Dimension m. Durch Verknüpfung von z mit einer geeigneten Abbildung $S \in GL_n\mathbb{R}$ OE $DF(0)(e_i) = e_i$ $i = 1, \dots, n$. Betrachte $\hat{F}: W \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$,

$$\hat{F}: (u_1, \dots, u_n) \mapsto F(u_1, \dots, u_m) + u_{m+1} e_{m+1} + \dots + u_n e_n$$

$\hat{F}(0) = 0$ $\quad D\hat{F}(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow$ lokale Umkehrfunktion L, $y = L \circ z$

$$L \circ F(u_1, \dots, u_m) = L \circ \hat{F}(u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0) = (u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0)$$

$\square$

#

3. <u>Lemma A</u> Sei $h: M \to N$ eine Immersion, sei $X \in \mathcal{X}(M)$. Zu jedem $p \in M$ gibt es offene Umgebungen U von p und V von $h(p)$ mit $h(U) \subseteq V$ und $\tilde{X} \in \mathcal{X}(V)$ so, dass

$$Dh(q)(X_q) = \tilde{X}_{h(q)} \quad \text{für alle } q \in U$$

<u>Beweis</u> Wähle Karten x, y wie in §4.2.

$$X_q = \sum_{i=1}^{m} \xi_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q$$

$$\tilde{X}_{\tilde{q}} = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\xi}_i(\tilde{q}) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{\tilde{q}}$$

$$\tilde{\xi}_i(\tilde{q}) = \xi_i\left(x^{-1}\left(y_1(\tilde{q}), \dots, y_m(\tilde{q})\right)\right) \qquad \square$$

<u>Lemma B</u> Sei $h: M \to N$ eine Immersion, seien $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Sei $p \in M$, seien $\tilde{X}, \tilde{Y}$ Vektorfelder nahe $h(p)$ so, dass

$$Dh(q) X_q = \tilde{X}_{h(q)}$$
$$Dh(q) Y_q = \tilde{Y}_{h(q)}$$

für q nahe p gilt. Dann gilt

$$Dh(q)([X,Y]_q) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{h(q)}.$$

Insbesondere ist $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_{h(q)} \in Dh(q)(T_q M)$.

<u>Bew:</u> In lokalen Koordinaten wie in 4.2

$$X_q = \sum_{i=1}^{m} \xi_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q \qquad Y_q = \sum_{i=1}^{m} \eta_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q$$

$$\tilde{X}_{\tilde{q}} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\xi}_j(\tilde{q}) \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{\tilde{q}} \qquad \tilde{Y}_{\tilde{q}} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\eta}_j(\tilde{q}) \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{\tilde{q}}$$

$$\Rightarrow \quad \xi_i(q) = \tilde{\xi}_i(h(q)) \qquad \eta_i(q) = \tilde{\eta}_i(h(q)) \qquad i = 1, \dots m$$

$$\xi_i(h(q)) = \eta_i(h(q)) = 0 \qquad m < i \leq n$$

$$[X, Y]_q = \sum_{i,j=1}^{m} \left(\xi_i(q) \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}(q) - \eta_i(q) \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}(q) \right) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_q$$

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]_{h(q)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Big(\tilde{\xi}_i(h(q)) \underbrace{\frac{\partial \tilde{\eta}_j}{\partial y_i}(h(q))}_{\substack{=0 \text{ für} \\ i > m}} - \tilde{\eta}_i(h(q)) \underbrace{\frac{\partial \tilde{\xi}_j}{\partial y_i}(h(q))}_{\substack{=0 \text{ für} \\ i > m}} \Big) \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{h(q)}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \left(\tilde{\xi}_i(h(q)) \frac{\partial \tilde{\eta}_j}{\partial y_i}(h(q)) - \tilde{\eta}_i(h(q)) \frac{\partial \tilde{\xi}_j}{\partial y_i}(h(q)) \right) \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{h(q)}$$

$$= Dh(q)([X, Y]_q) \text{ , denn}$$

$$Dh(q) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q = \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{h(q)} \qquad i = 1, \dots, m$$

$\square$

4. <u>Def</u> Sei (M, g^M) und (N, g^N) Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Eine Immersion $h: M \to N$ heißt <u>Riemannsche Immersion</u>, wenn für alle $p \in M$, $u, v \in T_pM$ gilt

$$g^M(u,v) = g^N(Dh(p)u, Dh(p)v)$$

Falls h zusätzlich ein Diffeomorphismus ist, heißt h Riemannsche Isometrie.

[Falls es eine glatte Funktion $\lambda > 0$ auf M gibt mit

$$\lambda(p) g^M(u,v) = g^N(Dh(p)u, Dh(p)v)$$

, so heißt h <u>konforme Abbildung</u>.]

<u>Beobachtung</u> (a) Ist $c \in \Omega(M,p,q)$ und ist $h: M \to N$ Riemannsche Immersion, so folgt

$$L(c) = L(h \circ c).$$

Insbesondere ist $d^M(p,q) \geq d^N(h(p),h(q))$.

Wenn h eine Isometrie ist, gilt Gleichheit.

<u>Beobachtung</u> (b) Ist (N, g^N) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ist $h: M \to N$ eine Immersion, definiere eine Riemannsche Metrik g^M auf M durch

$$g^M(u,v) = g^N(Dh(p)u, Dh(p)v) \qquad \begin{array}{l} p \in M \\ u,v \in T_pM \end{array}$$

Aus Lemma §4.2 folgt, dass g^M glatt ist. Da g^N positiv definit ist und $Dh(p)$ injektiv, ist auch g^M positiv definit und h ist Riem. Immersion.

Praktisch alle bisherigen Beispiele von Riemannschen Metriken haben wir so konstruiert, mit $N = \mathbb{R}^n$ und $g^N = g_{\text{eucl}}$.

5. Def Sei $h: M \to N$ eine Riemannsche Immersion.

Für $p \in M$ ~~haben wir eine~~ orthogonale Zerlegung

$$T_{h(p)} N = Dh(p)(T_p M) \oplus (Dh(p)(T_p M))^{\perp}$$

(bezüglich des Skalarproduktes $g^N_{h(p)}$.)

Entsprechend hat jeder Vektor $v \in T_{h(p)} M$ eine Zerlegung

$$v = nor_p(v) + tan_p(v) \qquad \begin{array}{l} nor_p(v) \in Dh(p)(T_p M)^{\perp} \\ tan_p(v) \in Dh(p)(T_p M) \end{array}$$

Weiter definieren wir den Normalenraum in p als

$$\perp_p M = \{p\} \times (Dh(p)(T_p M))^{\perp}$$

sowie $\perp M = \bigcup_{p \in M} \perp_p M$, $\pi(p, v) = p$

Mit Lemma §4.2 folgt: $\perp M \xrightarrow{\pi} M$ ist ein Vektorbündel, das Normalenbündel von $M \xrightarrow{h} N$.

6. Satz Sei $h: M \to N$ eine Riemannsche Immersion, seien ∇^M und ∇^N die jeweiligen Levi-Civita Zusammenhänge auf M und N. Sei $p \in M$ und seien X, Y glatte Vektorfelder nahe p, $\tilde{X}, \tilde{Y}$ glatte Vektorfelder nahe $h(p)$, mit

$$Dh(q)\,X_q = \tilde{X}_{h(q)}\,, \quad Dh(q)\,Y_q = \tilde{Y}_{h(q)}$$

für q nahe p, vgl §4.3 Lemma A. Dann gilt

$$Dh(q)\left(\nabla^M_X Y\right)_q = \tan_q\left(\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)$$

für q nahe p.

__Beweis__ Sei Z ein weiteres glattes Vektorfeld nahe p und $\tilde{Z}$ ein glattes Vektorfeld nahe $h(p)$, mit

$$Dh(q)\,Z_q = \tilde{Z}_{h(q)} \quad \text{für } q \text{ nahe } p.$$

Dann gilt: $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_{h(q)} = Dh(q)\,[X, Y]_q$

nach §4.3 Lemma B, entsprechend für $[\tilde{Y}, \tilde{Z}]$ und $[\tilde{Z}, \tilde{X}]$.

Jetzt Koszul-Formel

$$g^M(\nabla_X Y, Z)_q = g^N(Dh(q)(\nabla_X Y), \tilde{Z}_{h(q)})$$

LS: $X g^M(Y,Z) + Y g^M(Z,X) - Z g^M(X,Y)$

$- g^M(X,[Y,Z]) + g^M(Y,[Z,X]) + g^M(Z,[X,Y])$

Jetzt: $X\, g^M(Y,Z)_q = \tilde{X}\, g^N(Dh(q)Y, Dh(q)Z)$

$= \tilde{X}\, g^N(\tilde{Y},\tilde{Z})_q$ usw

$$g^M(X,[Y,Z])_q = g^N(Dh(q)X, Dh(q)[Y,Z])$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma § 4.3 II}}}{=} g^N(\tilde{X},[\tilde{Y},\tilde{Z}])_{h(q)}$$

Damit RS $= g^N(\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z})_{h(q)}$

Da $\tilde{Z}_{h(q)} \in Dh(q)(T_q M)$ beliebig ist, folgt die Behauptung. $\square$

7. Korollar Sei $h: M \to N$ eine Riemannsche Immersion, seien $p, q \in M$ und $c \in \Omega(M, p, q)$ stückweise glatt. Setze $\tilde{c}(t) = h(c(t))$. Dann sind äquivalent:

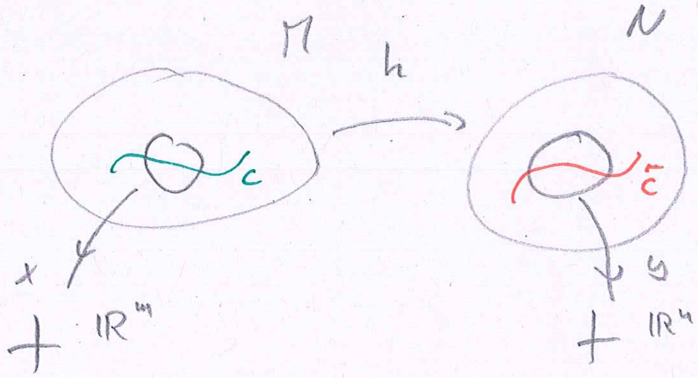
(i) c ist Geodäte

(ii) $\tan_{c(t)}\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{\tilde{c}}\big|_t\right) = 0$ für alle $t \in [0,1]$.

Beweis: In lokalen Koordinaten wie in § 4.2

$$x(c(t)) = (c_1(t), \ldots, c_m(t))$$

$$y(\tilde{c}(t)) = (c_1(t), \ldots, c_m(t), 0, \ldots 0)$$



$$\gamma_i = c_i'(t)$$

$$\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{c(t)}$$

$$\dot{\tilde{c}}(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(t) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{c(t)}$$

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c}\Big|_t = \sum_{k=1}^{m}\Big(\gamma_k' + \sum_{i,j=1}^{m} \gamma_i \gamma_j {}^M\Gamma_{ij}^k\Big)\frac{\partial}{\partial x_k}$$

${}^M\Gamma_{ij}^k$ Christoffel-Symbol auf M

${}^N\Gamma_{ij}^k$ Christoffelsymbol auf N

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{\tilde{c}}\Big|_t = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k' \frac{\partial}{\partial y_k} + \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \gamma_i \gamma_j {}^N\Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y_k}$$

$\boxed{{}^M\Gamma_{ij}^k = {}^N\Gamma_{ij}^k}$ für $1 \le i, j, k \le m$ nach voriger Seite #

□

7. <u>Satz</u> Sei $h: M \to N$ eine Riemannsche Immersion, sei $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sei $p \in M$. Seien $\tilde{X}, \tilde{Y}$ glatte Vektorfelder nahe $h(p)$ mit $\tilde{X}_{h(q)} = Dh(q) X_q$, $\tilde{Y}_{h(q)} = Dh(q) Y_q$. Dann ist

$$\mathrm{II}(X,Y)_q = \mathrm{nor}_q \left(\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y} \right) \in \perp_q M$$

nur abhängig von X_q, Y_q und damit ist II ein glattes Tensorfeld. Weiter gilt

$$\mathrm{II}(X,Y) = \mathrm{II}(Y,X).$$

Man nennt II die <u>zweite Fundamentalform</u> von M (die "erste Fundamentalform" ist g^M).

<u>Beweis</u> $\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y} \big|_{h(q)}$ hängt nur von $\tilde{X}_{h(q)} = Dh(q) X_q$ ab. Weiter ist

$$\left(\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla^N_{\tilde{Y}} \tilde{X} \right)_{h(q)} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{h(q)} \overset{\S 4.3 \text{ Lemma B}}{=} Dh(q) [X,Y]_q$$

folglich $\mathrm{II}(X,Y) - \mathrm{II}(Y,X) = \mathrm{nor}_q \left([\tilde{X}, \tilde{Y}]_{h(q)} \right) = 0$

Damit hängt $\mathrm{II}(X,Y)$ nur von X_q und Y_q ab. $\square$

Wir sehen weiter, dass gilt

$$\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y} \Big|_{h(q)} = Dh(q)(\nabla^M_X Y)_q + \mathrm{II}(X_q, Y_q).$$

8. <u>Beispiel</u> (a) Sei $r > 0$,

$M = S = \{ v \in \mathbb{R}^{l+1} \mid \|v\| = r \}$ l-Sphäre vom Radius r

$h : S \hookrightarrow \mathbb{R}^{l+1} = N$

Für $q \in S$ ist $T_q S = \{ (q, v) \mid v \in \mathbb{R}^{l+1}, \langle q, v \rangle = 0 \}$

Sei $p \in S$ und $(p, u), (p, v) \in T_p S$. Wir setzen für $q \in \mathbb{R}^{l+1}$

$\tilde{X}_q = (q, u - \frac{1}{r^2} \langle q, u \rangle q)$ Für $q \in S$ ist $X_q = \tilde{X}_q$

$\tilde{Y}_q = (q, v - \frac{1}{r^2} \langle q, v \rangle q)$ und $Y_q = \tilde{Y}_q$ tangential.

Weiter ist $\tilde{X}_p = (p, u)$ $\tilde{Y}_p = (p, v)$

Jetzt

$$\left(\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y} \right)_p = (p, D_u w) \qquad w(q) = v - \frac{1}{r^2} \langle q, v \rangle q$$

$$D_u w \Big|_p = -\frac{1}{r^2} \Big(\langle u, v \rangle p + \underbrace{\langle p, v \rangle}_{=0} u \Big)$$

$$= \frac{-1}{r^2} \langle u, v \rangle p$$

$\Rightarrow$ $\nabla^M_X Y \Big|_p = 0_{(\cdot)}$ und $\mathrm{II}(X_p, Y_p) = (p, \frac{-1}{r^2} \langle u, v \rangle p)$

Beispiel (b) $\quad M=\mathbb{R}^2 \quad N=\mathbb{R}^3=\mathbb{C}\times\mathbb{R}$

$$h(q_1,q_2) = (\exp(iq_1), q_2) = (h_1(q), h_2(q))$$

$u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}$

$$Dh(q)(q,u) = (h(q), h_1(q)\, i u_1, u_2)$$

$\Rightarrow$ h ist Riemannsche Immersion, da

$$\|Dh(q)(q,u)\|^2 = |h_1(q)\, i u_1|^2 + |u_2|^2 = |u_1|^2+|u_2|^2.$$

Vektorfelder X, Y auf M durch

$u,v\in\mathbb{R}^2$ fest

$$X_q=(q,u) \qquad Y_q=(q,v) \qquad \nabla^M_X Y = 0$$

$$Dh(q)X_q = (h(q), h_1(q)\, i u_1, u_2)$$

$\tilde q\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$

$\tilde q = (\tilde q_1, \tilde q_2)$

$\tilde q_1\in\mathbb{C}$

$\tilde q_2\in\mathbb{R}$

Setze $\tilde X_{\tilde q} = (\tilde q, \tilde q_1\, i u_1, u_2)$

$$\tilde Y_{\tilde q} = (\tilde q, \tilde q_1\, i v_1, v_2)$$

$$\nabla^{euc}_{\tilde X_{\tilde q}} \tilde Y\Big|_{\tilde q} = (\tilde q, \tilde q_1\, i u_1 i v_1, 0) = (\tilde q, -\tilde q_1 u_1 u_1, 0)$$

$$\Rightarrow \mathrm{II}(X,Y)_q = (h(q), -h_1(q) u_1 v_1, 0)$$

Beispiel (c) $F : \mathbb{S}^\ell \to N = \mathbb{R}^{(\ell+1)\times(\ell+1)}$

$M = F(\mathbb{S}^\ell) \cong \mathbb{R}P^\ell$, $h = M \hookrightarrow N$ ← Veronese-Einbettg.

$F(p) = p \cdot p^T$ (p Spaltenvektor)

$DF(p)(p,u) = (f(p), pu^T + up^T)$ | $(p,u) \in T_p \mathbb{S}^\ell \leadsto \langle p,u \rangle = 0$

Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{(\ell+1)\times(\ell+1)}$ ist $\langle A,B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$

$$\| pu^T + up^T \|^2 = \| pu^T \|^2 + \| up^T \|^2 + 2 \langle pu^T, up^T \rangle$$
$$= \operatorname{tr}(u \underbrace{p^T p}_{=1} u^T) + \operatorname{tr}(pu^T u p^T) + 2 \operatorname{tr}(u \underbrace{p^T u}_{=0} p^T)$$
$$= \|u\|^2 + \|u\|^2$$

$\leadsto f$ ist Immersion (und konforme Abbildung)

$X_q = (q, u - \langle u,q \rangle q)$ $\quad Y_q = (q, v - \langle v,q \rangle q)$

$u, v \in \mathbb{R}^\ell$, $\langle p,u \rangle = 0 = \langle p,v \rangle$

$$Df(q) X_q = (f(q), q(u - \langle u,q \rangle q)^T + (u - \langle u,q \rangle q) q^T)$$
$$= (f(q), qu^T + uq^T - 2 \langle u,q \rangle qq^T)$$

$$Df(q) Y_q = (f(q), qv^T + vq^T - 2 \langle v,q \rangle qq^T)$$

$$\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y} \Big|_{f(p)} = (f(p), uv^T + vu^T - 2 \langle v,u \rangle pp^T - 2 \underbrace{\langle v,p \rangle}_{=0} (\ldots))$$
$$= (f(p), uv^T + vu^T - 2 \langle u,v \rangle f(p))$$

$$\mathrm{II}(Dg(p)X_p, Dg(p)Y_p) = (f(p), uv^T + vu^T - 2 \langle u,v \rangle f(p))$$

$g : \mathbb{S}^\ell \to \mathbb{R}P^\ell$, $p \mapsto [p]$

8. <u>Satz</u> Sei $h: M \to N$ eine Riemannsche Immersion, sei $c: J \to M$ glatte Kurve und $\tilde{c} = h \circ c$.

Sei $X \in \mathfrak{X}(c)$ und $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{c})$ mit

$$Dh(c(t))X_{c(t)} = \tilde{X}_t$$

$$\begin{tikzcd} & TM \arrow[r, "Dh"] \arrow[d] & TN \arrow[d] \\ J \arrow[ur, "X"] \arrow[urr, "\tilde{X}"] \arrow[r, "c"] & M \arrow[r, "h"] & N \end{tikzcd}$$

Dann gilt

$$\frac{\nabla}{dt}\tilde{X}\Big|_t = Dh(c(t))\left(\frac{\nabla}{dt}X\right) + \mathrm{II}\left(\dot{c}(t), X_t\right) \qquad \#$$

<u>Bew:</u> Lokale Koordinaten x, y nahe $p = c(t)$ und $h(p)$ wie in §4.2, $\dim(M) = m$, $\dim(N) = n$

$$x\, c(t) = (c_1(t), \dots, c_m(t)) \qquad y\, \tilde{c}(t) = (c_1(t), \dots, c_m(t), 0, \dots, 0)$$

$$\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^m r_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{c(t)} \qquad \dot{\tilde{c}}(t) = \sum_{i=1}^m r_i(t) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{\tilde{c}(t)}$$

$r_i = c_i'$

$$X_t = \sum_{i=1}^m \xi_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{c(t)} \qquad \tilde{X}_t = \sum_{i=1}^m \xi_i(t) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{\tilde{c}(t)}$$

$$\frac{\nabla}{dt}X = \sum_{i=1}^m \xi_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{c(t)} + \sum_{i,j,k=1}^m \xi_i r_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_{c(t)}$$

$$\frac{\nabla}{dt}\tilde{X} = \sum_{i=1}^{m} \xi_i'(t) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{\tilde{c}(t)} + \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \xi_i r_j \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_{\tilde{c}(t)}$$

$$= Dh(c(t))\left(\frac{\nabla}{dt}X\right) + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k>m} \xi_i r_j \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_{\tilde{c}(t)}}_{= \mathrm{II}(\dot{c}, X)}$$

$\square$

Korollar: Ist $h: M \to N$ eine Riemannsche Immersion und ist $c: J \to M$ glatt, $\tilde{c} = h \circ c$, so sind äquivalent:

(i) c ist Geodät in M

(ii) $\frac{\nabla}{dt}\dot{\tilde{c}}\Big|_t = \mathrm{II}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$ für alle $t \in J$

9. Def: Eine Riemannsche Immersion $h: M \to N$ heißt total geodätisch, wenn für jede Geodät $c: J \to M$ auch $\tilde{c} = h \circ c$ eine Geodät in N ist.

Satz: Eine Riemannsche Immersion $h: M \to N$ ist genau dann total geodätisch, wenn ihre zweite Fundamentalform II verschwindet,

$$\mathrm{II} = 0$$

<u>Beweis</u> Ist $\mathrm{I\!I} = 0$, so ist $\tilde{c} = h\circ c$ Geodät, falls
c Geodät ist, vgl. Korollar §4.8.

Angenommen, $\tilde{c} = h \circ c$ ist immer eine Geodät, wenn
c eine Geodät ist. Es folgt $\mathrm{I\!I}(u,u) = 0$ für alle $u \in TM$.

Nun gilt $\underbrace{\mathrm{I\!I}(u+v, u+v)}_{=0} = \underbrace{\mathrm{I\!I}(u,u)}_{=0} + \mathrm{I\!I}(u,v) + \mathrm{I\!I}(v,u) + \underbrace{\mathrm{I\!I}(v,v)}_{=0}$

$= 2 \cdot \mathrm{I\!I}(u,v) \Rightarrow \mathrm{I\!I} = 0$ $\square$

<u>Beispiel</u> (a) $M = \mathbb{S}^l$, $p \in \mathbb{S}^l$, $(p,u), (p,v) \in T_p\mathbb{S}^l$

$\mathrm{I\!I}((p,u),(p,v)) = (p, -\langle u,v\rangle p)$, vgl Bsp §4.8 (a)

Es folgt: • $\mathbb{S}^l \hookrightarrow \mathbb{R}^{l+1}$ ist <u>nicht</u> total geodätisch

• $\mathbb{S}^{l-k} \hookrightarrow \mathbb{S}^l$ <u>ist</u> total geodätisch, $k \leq l$

$$\mathbb{S}^{l-k} \xrightarrow{h} \mathbb{S}^l, \; (u_0, \ldots, u_{l-k}) \longmapsto (u_0, \ldots, u_{l-k}, 0 \ldots 0)$$

(b) $\mathbb{R}^{l-k} \subseteq \mathbb{R}^l$ ist total geodätisch.

10. <u>Def</u> Sei $h: M \to N$ eine Riemannsche Immersion.

Sei $p \in M$ und $w \in \perp_p M$. Wir definieren eine lineare Abbildung $S_w : T_pM \to T_pM$ durch

$$g^M(S_w u, v) = \bar{g}^N(\mathrm{II}(u,v), w)$$

Da g^M nicht ausgeartet ist, ist S_w wohldefiniert.

Da $\mathrm{II}(u,v) = \mathrm{II}(v,u)$ gilt, ist S_w <u>selbstadjungiert</u>,

d.h. $g^M(S_w u, v) = g^M(u, S_w v)$.

Man nennt die lineare Abbildung $\perp_p M \to \mathrm{End}(T_pM)$, $w \mapsto S_w$ den <u>Formoperator</u> (engl. shape operator) oder die <u>Weingarten abbildung</u>.

Die Eigenwerte von S_w heißen die <u>Hauptkrümmungen</u> von h in Richtung w.

Beachte auch: die Gleichung oben besagt, dass

$S : \perp_p M \to \mathrm{End}(T_pM)$ die zweite Fundamentalform vollständig festlegt – S und II tragen die gleiche Information.

<u>Beispiel</u> (a) $S = \{ p \in \mathbb{R}^{l+1} \mid \|p\| = r \}$

vgl. § 4.8 (a). Für $p \in S$ wird $\perp_p M$ von

$Z_p = (p, \frac{1}{r} p)$ aufgespannt und $\|Z_p\| = 1$.

Es gilt $g(\mathrm{II}(X_p, Y_p), Z_p) = -\frac{1}{r^2} \langle u, v \rangle \frac{1}{r} \underbrace{\langle p, p \rangle}_{= r^2} =$

$X_p = (p, u)$ $\qquad -\frac{1}{r} \langle u, v \rangle$

$Y_p = (p, v)$

$\Rightarrow S_{Z_p} = \frac{-1}{r} \, id_{T_p M}$

Die Hauptkrümmung von $S \overset{h}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^{l+1}$ ist also $-\frac{1}{r}$ (bezüglich Z_p)

(b) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(q_1, q_2) \mapsto (\exp(i q_1), q_2) = (h_1(p), q_2)$

vgl § 4.8 (b). Für $p \in \mathbb{R}^2$ und $Z_p = (h(p), h_1(p), 0)$

ist $S_{Z_p} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, da $\mathrm{II}(X_p, Y_p) = (h(p), -h_1(p) u_1 v_1, 0)$

$X_p = (p, u) \quad Y_p = (p, v)$

$\rightsquigarrow$ Hauptkrümmungen $-1, 0$

Die 2. Fundamentalform II und der Formoperator S hängen von der Immersion h ab, nicht nur von der Mannigfaltigkeit M. Das sieht man am Beispiel (b): $M = \mathbb{R}^2$ ist "flach", aber für die Abbildung $M \to \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ ist $\mathrm{II} \neq 0$.

Man spricht von "äußeren Krümmungsgrößen".

Wir definieren jetzt den Krümmungstensor R von (M, g), der nur von der Riemannschen Metrik g abhängt.

11. <u>Def</u> Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, seien $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Dann ist #

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$
$$= [\nabla_X, \nabla_Y] Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

ein glattes Tensorfeld, d.h. $(R(X,Y)Z)_p$ hängt nur von X_p, Y_p, Z_p ab.

Man nennt R den <u>Riemannschen Krümmungstensor</u>

<u>Beweis</u> Klar ist: R ist $\mathbb{R}$-linear in X, Y, Z.

Nach § 3.4 müssen wir zeigen, dass R linear über $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist. Sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$R(fX, Y)Z \overset{(1)}{=} f\,R(X,Y)Z - Y(f)\nabla_X Z + \nabla_{Y(f)X} Z$$
$$= f\,R(X,Y)Z$$

genauso $R(X, fY)Z = f\,R(X,Y)Z$

$$R(X,Y)(fZ) = f\,R(X,Y)Z + \nabla_X (Yf)Z + X(f)\nabla_Y Z$$
$$- \nabla_Y (Xf) Z - Y(f)\nabla_X Z$$
$$- [X,Y](f)Z$$
$$= f\,R(X,Y)Z + \cancel{X(Y(f))} + \cancel{(Yf)\nabla_X Z} + \cancel{(Xf)\nabla_Y Z}$$
$$- \cancel{Y(X(f))} - \cancel{X(f)\nabla_Y Z} - \cancel{Y(f)\nabla_X Z} - \cancel{[X,Y](f)Z}$$

□

(1) $[fX, Y] = f[X,Y] - Y(f)X$

12. **Satz** Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Krümmungstensor R hat folgende Symmetrien.

(i) $R(X,Y) + R(Y,X) = 0$

(ii) $R(X,Y)$ ist schiefsymmetrisch bezüglich g, d.h.

$$g(R(X,Y)Z,W) + g(Z,R(X,Y)W) = 0$$

(iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

(1. Bianchi-Identität)

(iv) $g(R(\underbrace{X,Y}) \underbrace{Z,W}) = g(R(\underbrace{Z,W}) \underbrace{X,Y})$.

Beweis (i) ist klar aus der Definition von R.

Die Bedingungen (ii) und (iii) prüfen wir in Koordinaten x auf den Feldern $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x_k}$ für i,j,k beliebig. Dann ist

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X, \quad \text{weil } [X,Y] = 0$$

Es folgt

$$g(R(X,Y)Z,Z) = g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z)$$

$$= X g(\nabla_Y Z, Z) - \cancel{g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z)} - Y g(\nabla_X Z, Z) + \cancel{g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z)}$$

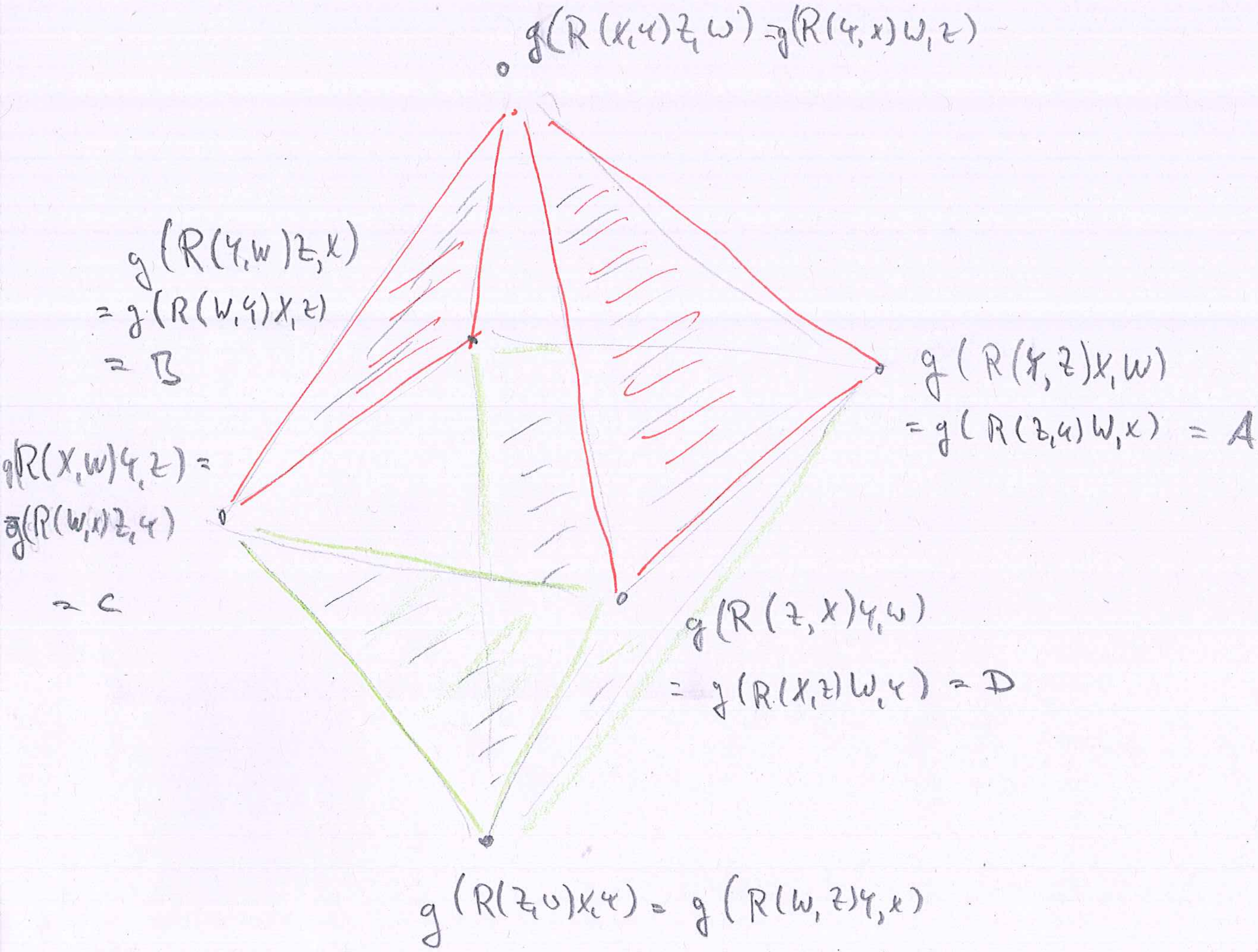
$$= \frac{1}{2} X Y g(Z,Z) - \frac{1}{2} Y X g(Z,Z) = \frac{1}{2} \underbrace{[X,Y]}_{=0} g(Z,Z) = 0$$

Durch Polarisieren folgt (ii)

(iii) Für eine $\overbrace{\text{Funktion}}^{\text{(Vektorwertige}}$ in 3 Variablen $F(a,b,c)$ setzen wir $(SF)(a,b,c) = F(a,b,c) + F(b,c,a) + F(c,a,b)$.

Nun
$$SR(X,Y)Z = S\nabla_X \nabla_Y Z - S\nabla_Y \nabla_X Z$$
$$= S\nabla_Y \nabla_Z X - S\nabla_Y \nabla_X Z$$
$$= S\nabla_Y \underbrace{[Z,X]}_{=0} = 0$$

(iv) Folgt jetzt rein formal:



$$\Rightarrow \quad 2\, g(R(X,Y)Z,W) = -(A+B+C+D)$$

$$2\, g(R(W,Z)Y,X) = -(A+B+C+D) \qquad \square$$

<u>Beispiel</u> $M = U \subseteq \mathbb{R}^l$ offen mit $g = g_{eukl}$,

$x = id_U \rightsquigarrow [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0 \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$ für alle i,j

$\Rightarrow R = 0$.

Wir könnten R auf der Sphäre ähnlich wie in Beispiel §4.8 (a) berechnen. Besser ist aber folgender eleganter Satz.

13. Satz (die <u>Gauß-Gleichung</u>)

Sei $h: M \to N$ eine Riemannsche Immersion. Dann gilt für die Krümmungstensor R^M von M bzw R^N von N und $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$,

$\tilde{X}_{h(q)} = Dh(q) X_q, \ldots, \tilde{W}_{h(q)} = Dh(q) W_q$

$$g^N(R^N(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W}) = g^M(R^M(X,Y)Z, W)$$

$$+ g^N(\mathrm{II}(X,Z), \mathrm{II}(Y,W)) - g^N(\mathrm{II}(Y,Z), \mathrm{II}(X,W)) .$$

Beweis Wir wählen Koordinaten x, y wie in §4.2 und betrachten $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x_k}$, $W = \frac{\partial}{\partial x_l}$

$\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial y_i}$, $\tilde{Y} = \frac{\partial}{\partial y_j}$, $\tilde{Z} = \frac{\partial}{\partial y_k}$, $\tilde{W} = \frac{\partial}{\partial y_l}$, i, j, k, l beliebig.

Nun gilt wegen $[X,Y] = 0$ $\quad R(X,Y) = \nabla^M_X \nabla^M_Y - \nabla^M_Y \nabla^M_X$

$$R(\tilde{X},\tilde{Y}) = \nabla^N_{\tilde{X}} \nabla^N_{\tilde{Y}} - \nabla^N_{\tilde{Y}} \nabla^N_{\tilde{X}}.$$

Wir rechnen im Punkt $h(q)$

$$g^N(\nabla^N_{\tilde{X}} \nabla^N_{\tilde{Y}} \tilde{Z}, \tilde{W}) = g^N(\nabla^N_{\tilde{X}} \widetilde{\nabla^M_Y Z}, \tilde{W}) + g^N(\nabla^N_{\tilde{X}}(\mathrm{II}(Y,Z)), \tilde{W})$$

$$\overset{§4.6}{=} g^M(\nabla^M_X \nabla^M_Y Z, W) + g^N(\nabla^N_{\tilde{X}}(\mathrm{II}(Y,Z)), \tilde{W})$$

$$= g^M(\nabla^M_X \nabla^M_Y Z, W) + \underbrace{\tilde{X}\, g^N(\mathrm{II}(Y,Z), \tilde{W})}_{=0} - g^N(\mathrm{II}(Y,Z), \nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{W})$$

$$= g^M(\nabla^M_X \nabla^M_Y Z, W) - g^N(\mathrm{II}(Y,Z), \mathrm{II}(X,W))$$

Genauso

$$g^N(\nabla^N_{\tilde{Y}} \nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Z}, \tilde{W}) = g^M(\nabla^M_Y \nabla^M_X Z, W) - g^N(\mathrm{II}(X,Z), \mathrm{II}(Y,W))$$

$\square$

Beispiel $M = S_r \subseteq \mathbb{R}^{l+1}$

$$S_r = \{ v \in \mathbb{R}^{l+1} \mid \|v\| = r \} \qquad r > 0$$

Wir hatten berechnet (Beispiel §4.8 (a)): für

$p \in M$, $X_p, Y_p \in T_pM$, mit $X_p = (p,u)$, $Y_p = (p,v)$ ist

$$\mathrm{II}(X_p, Y_p) = \left(p, \frac{-1}{r^2}\langle u,v\rangle p\right)$$

Es folgt mit $Z_p = (p,w)$, $W_p = (p,\tilde{w})$

$$0 = g^M(R^M(X_p,Y_p)Z_p, W_p) + g^N(\mathrm{II}(X_p,Z_p), \mathrm{II}(Y_p,W_p)) - g^N(\mathrm{II}(Y_p,Z_p), \mathrm{II}(X_p,W_p))$$

$$\Rightarrow g^M(R^M(X_p,Y_p)Z_p, W_p) = \frac{r^2}{r^4}\left(\langle v,w\rangle\langle u,\tilde{w}\rangle - \langle u,w\rangle\langle v,\tilde{w}\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(\langle v,w\rangle\langle u,\tilde{w}\rangle - \langle u,w\rangle\langle v,\tilde{w}\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{R(X_p,Y_p)Z_p = \frac{1}{r^2}\left(g(Y_p,Z_p)X_p - g(X_p,Z_p)Y_p\right)}$$

$$= \left(p, \frac{1}{r^2}\left(u v^T w - v u^T w\right)\right)$$

Spaltenvektoren!

#

Der Krümmungstensor R einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) ist eine (komplizierte) vektorwertige Abbildung. Wir definieren einige daraus abgeleitete Krümmungsgrößen.

14. Die Schnittkrümmung

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\dim M \geq 2$, sei $p \in M$ und sei $u, v \in T_pM$. Setze

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(u,v) &= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - g(u,v)^2 \\ &= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 (1 - \cos^2\varphi) \qquad \varphi = \measuredangle(u,v) \\ &= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \cdot \sin^2\varphi \geq 0 \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi\end{aligned}$$

Falls u, v linear unabhängig sind, ist $\mathcal{X}(u,v) \neq 0$.

Sei $H = \operatorname{span}\{u,v\} \subseteq T_pM$. Wir definieren die <u>Schnittkrümmung</u> von H als

$$K(H) = -\frac{g(R(u,v)u,v)}{\mathcal{X}(u,v)} \in \mathbb{R}$$

<u>Lemma</u> Die rechte Seite hängt nur von der Ebene $H \subseteq T_pM$ ab, nicht von den Vektoren u, v.

Bew: (1) $\varkappa(u+\lambda v, v) = \|u+\lambda v\|^2 \cdot \|v\|^2 - g(u+\lambda v, v)^2$

$$= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 + \underbrace{\lambda^2 \|v\|^2 \cdot \|v\|^2} + \underbrace{2\lambda\, g(u,v) \cdot \|v\|^2}$$

$$- \Big(g(u,v)^2 + \underbrace{\lambda^2 g(v,v)^2} + \underbrace{2\lambda\, g(u,v)\, g(v,v)} \Big) = \varkappa(u,v)$$

sowie

$$g\big(R(u+\lambda v, v)(u+\lambda v), v\big) = g\big(R(u+\lambda v, v)u, v\big) + \lambda\, \cancelto{0}{g\big(R(u+\lambda v, v)v, v\big)}$$

$$= g\big(R(u,v)u,v\big) + \lambda \cdot g\big(\cancelto{0}{R(v,v)}u, v\big) = g\big(R(u,v)u,v\big).$$

(2) $\varkappa(u,v) = \varkappa(v,u)$

sowie

$$g\big(R(u,v)u,v\big) = -g\big(R(v,u)u,v\big) = g\big(R(v,u)v,u\big)$$

(3) $\varkappa(\lambda u, v) = \lambda^2 \varkappa(u,v)$

sowie

$$g\big(R(\lambda u, v)\lambda u, v\big) = \lambda^2 \cdot g\big(R(u,v)u,v\big)$$

Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\lambda \neq 0)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} (\lambda \neq 0)$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ erzeugen die Matrizengruppe $GL_2\mathbb{R}$ (→ Gauß-Verfahren). Die Rechnungen (1), (2), (3) zeigen, dass die rechte Seite invariant ist unter Basiswechsel. □

Man sagt, (M,g) hat <u>positive</u> (<u>negative</u>) <u>Schnittkrümmung</u>, wenn für alle $p \in M$, $H \leq T_pM$ 2-dimensional, gilt $K(H) > 0$ (bzw $K(H) < 0$)

15. <u>Beispiel</u> (a) $U \leq \mathbb{R}^l$ offen mit euklid. Metrik, $l \geq 2$,

$\Rightarrow K(H) = 0$.

Allgemein nennt man (M,g) <u>flach</u>, wenn gilt $K(H) = 0$ für alle $H \leq T_pM$, alle $p \in M$.

(b) $M = S_r$ Sphäre vom Radius r, Dimension $n \geq 2$.

Sei $p \in S_r$, sei $X_p, Y_p \in T_pM$ orthonormal-Basis von $H \leq T_pS_r$

$$\mathcal{H}(X_p, Y_p) = 1 - 0 = 1$$

$$- g(R(X_p, Y_p)X_p, Y_p) = \boxed{\frac{1}{r^2} = K(H)}$$

Die Sphäre vom Radius r hat konstante Schnittkrümmung $K = \frac{1}{r^2}$

<u>Bem</u> Es gibt "sehr viele" Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M,g) mit $K<0$. Dagegen scheint die Klasse der Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit $K>0$ "klein" zu sein. Beispiele sind projektive Räume $\mathbb{RP}^n$, $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{HP}^n$, $\mathbb{OP}^2$ ($\mathbb{H}$ = Quaternionen, $\mathbb{O}$ = Cayley-Algebra) sowie sphärische Raumformen (Unterlagerungen von $\mathbb{S}^n$).

Es ist zum Beispiel nicht bekannt, ob $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ eine Riemannsche Metrik g mit $K>0$ erlaubt (!).

<u>Thm</u> (Brendle-Schoen) Ist (M,g) kompakt, $\delta_p = \frac{\min K_p}{\max K_p}$, $\frac{1}{4} < \delta_p \Rightarrow M$ Unterlagerung von $\mathbb{S}^n$ bis auf Diffeomorphie

—

Für $\dim(M) \leq 1$ ist die Schnittkrümmung nicht definiert.

Für $\dim(M) = 2$ stimmt die Schnittkrümmung mit der Gauß-Krümmung überein.

16. <u>Satz</u> (Gauß Theorema Egregium)

Sei (M,g) eine 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $h: M \to \mathbb{R}^3$ eine Riemannsche Immersion.

Dann gilt für jedes $p \in M$

$$K(p) = \det(S_w) \quad , \quad \begin{array}{l} w \in \perp_p M \\ \|w\| = 1 \end{array}$$

<u>Beweis</u> Nach der Gauß-Gleichung gilt für $u, v \in T_pM$

$$g(R^M(u,v)u,v) = g(\mathrm{II}(v,u), \mathrm{II}(u,v)) - g(\mathrm{II}(u,u), \mathrm{II}(v,v)).$$

Weiter ist $g(S_w u,v) = g(\mathrm{II}(u,v), w)$

$$\Rightarrow \mathrm{II}(u,v) = g(S_w u,v)\cdot w \qquad \text{wenn } \|w\|=1$$

und
$$\mathrm{II}(u,u) = g(S_w u,u)\, w$$
$$\mathrm{II}(v,v) = g(S_w v,v)\, w$$

Damit
$$K(p) = - \frac{g(S_w u,v)^2 - g(S_w u,u)\, g(S_w v,v)}{\varkappa(u,v)}$$

Seien α, β die beiden Eigenwerte von S_w $\left(S_w \sim \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right)$

und seien u, v orthogonale Eigenvektoren der Länge 1.

Es folgt $\varkappa(u,v) = 1$, $g(S_w u,v)^2 = 0$

$$g(S_w u,u)\, g(S_w v,v) = \alpha \cdot \beta = \det(S_w) \qquad \square$$

17. Lemma Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Sei $F: T_pM \times T_pM \to \mathrm{End}(T_pM)$ eine bilineare Abbildung, die die gleichen Symmetrien (i)–(iv) wie der Krümmungstensor R hat.

Falls $g(R(u,v)u,v) = g(F(u,v)u,v)$ für alle $u,v \in T_pM$ gilt, ist $F = R$.

Beweis Sei $\Delta = R - F$. Dann hat Δ auch die Symmetrien (i)–(iv). Zu zeigen: $\Delta = 0$.

(a) $\Delta(u,v)u = 0$

Denn: $g(\Delta(u,v+w)u, v+w) = 0$

$$= \cancel{g(\Delta(u,v)u,v)} + g(\Delta(u,v)u,w) + g(\Delta(u,w)u,v) + \cancel{g(\Delta(u,w)u,w)}$$

$$= 2\, g(\Delta(u,v)u,w)$$

(b) $\Delta(w,u)v = \Delta(v,w)u$

Denn: $\Delta(u+v,w)(u+v) = 0$

$$= \cancel{\Delta(u,w)u} + \Delta(u,w)v + \Delta(v,w)u + \cancel{\Delta(v,w)v}$$

Es folgt $\Delta(u,v)w + \Delta(v,w)u + \Delta(w,u)v = 3\Delta(u,v)w$

$= 0$ $\square$

Korollar A Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\dim(M) \geq 2$, sei $p \in M$. Angenommen, für alle Ebenen $H \subseteq T_pM$ gilt $K(H) = c = \text{const.}$ Dann gilt für alle $u,v,w \in T_pM$

$$R(u,v)w = c\,\big(g(v,w)u - g(u,w)v\big)$$

Beweis Setze $F(u,v)w = c\cdot\big(g(v,w)u - g(u,w)v\big)$.

Dann hat F die Symmetrien (i) – (iv).

Nach Voraussetzung gilt für alle linear unabhängigen $u,v \in T_pM$

$$c = -\frac{g(R(u,v)u,v)}{\varkappa(u,v)}$$

$\Rightarrow \varkappa(u,v)\cdot c = -g(R(u,v)u,v)$ gilt für alle $u,v \in T_pM$

Andererseits ist

$$g(F(u,v)u,v) = -c\cdot\varkappa(u,v)$$

$\Rightarrow F = R.$ $\square$

Korollar B Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) hat Schnittkrümmung $K=0$ genau dann, wenn $R=0$ gilt.

Dann heißt (M,g) flach. #

Korollar C Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$, $\dim(M) \geq 2$. Setze

$Gr_2(T_pM) = \{ H \subseteq T_pM \mid H \text{ ist 2-dimensionaler UVR} \}$.

Die Abbildung $K: Gr_2(T_pM) \longrightarrow \mathbb{R}$, $H \mapsto K(H)$ bestimmt den Krümmungstensor R_p in p eindeutig.

Beweis: Angenommen, $F: T_pM \times T_pM \to End(T_pM)$ ist bilinear, hat die Symmetrien (i) – (iv) des Krümmungstensors, und für alle linear unabhängigen $u,v \in T_pM$ gilt

$$K(\mathrm{span}\{u,v\}) = -\frac{g(F(u,v)u,v)}{\varkappa(u,v)}.$$

Dann gilt für alle $u,v \in T_pM$, die linear unabh. sind

$$\frac{g(F(u,v)u,v)}{\underbrace{\varkappa(u,v)}_{\neq 0}} = \frac{g(R(u,v)u,v)}{\varkappa(u,v)}$$

$$\Rightarrow g(F(u,v)u,v) = g(R(u,v)u,v)$$

Wenn u, v linear abhängig sind, so ist
$F(u,v) = 0 = R(u,v)$ (weil $R(u,v) = -R(v,u)$)
$\Rightarrow g(R(u,v)u,v) = g(F(u,v)u,v)$ für alle $u,v \in T_pM$ $\square$

Es gibt weitere Krümmungsgrößen, die wir kurz durchgehen.

18. Def Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Ricci-Form ist die Bilinearform

$$ric_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$
$$(u,v) \longmapsto tr\left[z \mapsto R(z,u)v\right] = tr(R(\_,u)v)$$

Ist $e_1, \dots, e_\ell$ eine ONB von T_pM, so folgt

$$ric_p(u,v) = \sum_{j=1}^{\ell} g(R(e_j,u)v, e_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{\ell} g(R(v,e_j)e_j,u) = \sum_{j=1}^{\ell} g(R(e_j,v)u,e_j)$$

$\Rightarrow ric_p(u,v) = ric_p(v,u)$, die Ricci-Form ist symmetrisch.

Ist $ric = 0$, so heißt (M,g) Ricci-flach.
Ist ric positiv definit (negativ definit), so schreibt man kurz $ric > 0$ (bzw $ric < 0$).

Satz Ist (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\dim(M) \geq 2$, $p \in M$ und gilt $K(H) = c$ für alle 2-dimensionalen Unterräume $H \subseteq T_pM$, so ist für alle $u, v \in T_pM$

$$ric_p(u,v) = c \cdot (\ell - 1)\, g(u,v).$$

Insbesondere: $K = 0 \Rightarrow ric = 0$

Beweis Sei $\{e_1, \ldots, e_\ell\}$ ONB für T_pM. Dann gilt

$$R(e_j, u)v \underset{\S 4.17A}{=} c \cdot \big(g(u,v) e_j - \underbrace{g(e_j, v)}_{=: v_j} u \big)$$

$$\Rightarrow g(R(e_j,u)v, e_j) = c\big(g(u,v) - u_j \cdot v_j \big)$$

$$\Rightarrow ric_p(u,v) = c \cdot \ell\, g(u,v) - c\, g(u,v) = c(\ell-1)\, g(u,v) \quad \square$$

Def Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) heißt <u>Einsteinsch</u>(*), wenn es $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt so, dass $ric = \lambda \cdot g$ gilt.

—

(*) Einstein-Gleichung im Vakuum

$$ric_p - \frac{1}{2} \mathrm{tr}(Ric_p)\, g + \underset{\text{"kosmolog. Konstante"}}{\Lambda} \cdot g = 0$$

Also ist $S_r = \{ v \in \mathbb{R}^{\ell+1} \mid \|v\| = r \}$ $\quad r > 0$

Einsteinsch, mit Einstein-Konstante $\lambda = \frac{1}{r^2}(\ell - 1)$

Das Ricci-Tensor Ric_p ist definiert durch

$$g(\mathrm{Ric}_p u, v) = \mathrm{ric}_p(u,v), \quad \mathrm{Ric}_p \in \mathrm{End}(T_pM).$$

Bem Falls für alle $H \subseteq T_pM$ 2-dimensional gilt

$K(H) < 0$ (bzw $K(H) > 0$), so folgt

$\mathrm{ric}_p < 0$ (bzw $\mathrm{ric}_p > 0$), kurz

$$K_p = 0 \Rightarrow \mathrm{ric}_p = 0$$

$$K_p < 0 \Rightarrow \mathrm{ric}_p < 0$$

$$K_p > 0 \Rightarrow \mathrm{ric}_p > 0$$

Denn $K(H) = -\dfrac{g(R(u,v)u,v)}{\underbrace{\varkappa(u,v)}_{>0}}$

$e_1, \ldots, e_e$ ONB von T_pM

$K_p < 0$, $g(R(e_j, u)u, e_j) = -g(R(e_j,u)e_j, u) < 0$ (e_j, u lin unab)

$\Rightarrow \mathrm{ric}_p(u,u) < 0$ wenn $u \neq 0$

genauso $K_p > 0 \Rightarrow \mathrm{ric}_p(u,u) > 0$ wenn $u \neq 0$.

— Es ist wenig bekannt über die Existenz / Nichtexistenz von Riemannsch Metrik g auf kompakten Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{ric} > 0$.

Dagegen gilt für $ric_p < 0$ folgender Satz

Theorem (Lohkamp 1994) Sei M eine (metrisierbare) glatte Mannigfaltigkeit, $\dim(M) \geq 3$. Dann existiert auf M eine vollständige Riemannsche Metrik g mit $ric < 0$.

19. **Def** Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Skalarkrümmung von g ist die glatte reelle Funktion

$$p \longmapsto scal_p = tr(Ric_p)$$

Ist $\{e_1, \dots, e_\ell\}$ eine ONB von T_pM, so ist

$$scal_p = \sum_{i,j=1}^{\ell} g(R(e_i,e_j)e_j, e_i)$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\ell} K(H_{ij}) \qquad H_{ij} = \operatorname{span}\{e_i, e_j\}$$

Es gilt folglich die Implikation (dim $M \geq 2$)

$$\boxed{\begin{array}{lllll} K = 0 & \Rightarrow & ric = 0 & \Rightarrow & scal = 0 \\ K < 0 & \Rightarrow & ric < 0 & \Rightarrow & scal < 0 \\ K > 0 & \Rightarrow & ric > 0 & \Rightarrow & scal > 0 \end{array}}$$

(Keiner der Pfeile lässt sich umdrehen)

Mit Lohkamps Theorem folgt sofort:
auf jeder glatten (metrisierbaren) Mannigfaltigkeit M, $\dim(M) \geq 3$, gibt es eine vollständige Riemannsche Metrik g mit $\mathrm{scal} < 0$ (!).

Über Metriken g mit $\mathrm{scal} > 0$ ist folgendes bekannt.

<u>Thm</u> (Gromov-Lawson; Stolz) Sei M eine kompakte <u>einfach zush.</u> glatte Mannigfaltigkeit, $\dim(M) \geq 5$.
$\pi_1(M) = 0 = \pi_0(M)$

(i) [GL] Wenn $w_2(M) \in H^2(M;\mathbb{Z}/2)$ $w_2 \neq 0$, so existiert g mit $\mathrm{scal} > 0$.

(ii) [S] Wenn $w_2 = 0$ und $\alpha([M]) = 0$, so existiert g mit $\mathrm{scal} > 0$.

$\alpha : \Omega^{\mathrm{Spin}}_{*} \to KO(S^0)$ Index

w_2: 2. Stiefel-Whitney Klasse