

## 11. Hausaufgabenblatt zur Einführung in die Algebra

(**Abgabe:** bis Dienstag 20.01.2015, 12:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

### Aufgabe 11.1

Bestimmen Sie die Grade der folgenden Körpererweiterungen:

- i)  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$
- ii)  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25})$

### Aufgabe 11.2

Sei  $R$  ein Integritätsbereich und  $K \subseteq R$  ein Körper. Zeigen Sie: wenn  $R$  als  $K$ -Vektorraum endliche Dimension hat, dann ist  $R$  bereits ein Körper.

### Aufgabe 11.3

Sei  $K$  ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass gilt:  $\#K = p^n$  für eine Primzahl  $p$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

*Hinweis:* Betrachten Sie dazu den Primkörper von  $K$ .

### Aufgabe 11.4

Eine Körpererweiterung  $K \subseteq L$  heißt **algebraisch**, wenn jedes Element von  $L$  algebraisch über  $K$  ist. Zeigen Sie:

- i) Wenn  $[L : K] < \infty$ , dann ist  $K \subseteq L$  eine algebraische Körpererweiterung.
- ii) Eine Körpererweiterung  $K \subseteq L$  ist genau dann algebraisch, wenn jeder Unterring  $R$  mit  $K \subseteq R \subseteq L$  bereits ein Körper ist.