Prof. Dr. L. Kramer
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 14/15

2. Hausaufgabenblatt zur Einführung in die Algebra

(**Abgabe:** bis Dienstag 28.10.2014, 12:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 2.1

Eine Gruppe G hat Exponent k, wenn für jedes Gruppenelement $g \in G$ gilt: $g^k = e$. Zeigen Sie, dass Gruppen vom Exponenten 2 abelsch sind.

*) Zeigen Sie, dass im allgemeinen Gruppen vom Exponenten 3 nicht abelsch sind.
Hinweis: Betrachten Sie dazu eine geeignete 27-elementige Untergruppe $U \subseteq \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$, wobei $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ der Körper mit 3 Elementen ist.

Aufgabe 2.2

Zeigen Sie, dass jeder Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$ konstant ist.

Aufgabe 2.3

Gegeben sei eine Menge X und die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(X)$. Der Träger einer Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(X)$ ist definiert wie folgt: $\mathrm{supp}(\sigma) := \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\}$. Zeigen Sie:

i) Wenn $\mathrm{supp}(\rho) \cap \mathrm{supp}(\sigma) = \emptyset$ für $\rho, \sigma \in \mathrm{Sym}(X)$ gilt, dann folgt $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.
ii) Wenn $\mathrm{supp}(\rho) \cap \mathrm{supp}(\sigma) = \emptyset$ und $\rho \circ \sigma = id$ für $\sigma, \rho \in \mathrm{Sym}(X)$ gilt, dann folgt $\rho = \sigma = id$.

Aufgabe 2.4

Gegeben sei eine Menge X mit $\#X = n$. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente $\sigma \in \mathrm{Sym}(X)$ mit $\sigma^2 = id$.