Prof. Dr. L. Kramer
Dipl.-Math. O. Varghese WS 14/15

3. Hausaufgabenblatt zur Einführung in die Algebra

(**Abgabe:** bis Dienstag 4.11.2014, 12:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 3.1

Gegeben seien Gruppen G und H. Zeigen Sie:

i) Die Gruppe G ist genau dann abelsch, wenn die Abbildung $f : G \to G$, $f(g) = g^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

ii) Gegeben sei ein Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to H$. Weiter sei $g \in G$ mit $o(g) < \infty$. Zeigen Sie, dass die Ordnung von $\phi(g)$ ein Teiler der Ordnung von g ist.

Aufgabe 3.2

Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe.

i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : \{gH \mid g \in G\} &\to \{Hg \mid g \in G\} \\ gH &\mapsto Hg^{-1} \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Abbildung ist, die die Linksnebenklassen bijektiv auf die Rechtsnebenklassen abbildet.

ii) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler in G ist, wenn $[G : H] = 2$ gilt.

Aufgabe 3.3

Sei G eine endliche Gruppe mit $\#G = 2n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass ein Element $g \in G$ mit $o(g) = 2$ existiert.

Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $A = \left\{g \in G \mid g = g^{-1}\right\}$ und $B = \left\{g \in G \mid g \neq g^{-1}\right\}$.

Aufgabe 3.4

Sei G eine endliche Gruppe und $f : G \to G$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie: Wenn aus $f(x) = x$ folgt $x = e_G$ und wenn $f \circ f = id$ ist, dann gilt $f(x) = x^{-1}$ für alle $x \in G$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jedes Element aus G die Form $x \cdot f(x)^{-1}$ für ein $x \in G$ hat.

*** Aufgabe**

i) Zeigen Sie, dass in $\mathrm{Sym}(n)$ immer ein Element g mit $o(g) = n$ existiert.

ii) Finden Sie ein Element $g \in \mathrm{Sym}(n)$ mit $o(g) > n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.