Prof. Dr. L. Kramer
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 14/15

4. Hausaufgabenblatt zur Einführung in die Algebra

(**Abgabe:** bis Dienstag 11.11.2014, 12:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 4.1

Gegeben sei eine endliche zyklische Gruppe G mit $\#G = n$. Zeigen Sie, dass es für jeden Teiler m von n eine eindeutige Untergruppe H von G existiert mit $\#H = m$.

Aufgabe 4.2

Gegeben sei die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$, wobei K ein Körper ist und $n \geq 1$. Weiter definieren wir

$$\mathcal{P} = \{U \mid U \subseteq K^n \text{ Unterraum mit } \dim U = 1\}.$$

i) Zeigen Sie, dass die Wirkung von $\mathrm{GL}_n(K)$ auf $\mathcal{P}$ transitiv ist.
ii) Bestimmen Sie den Stabilisator von $\langle(1, 0, \ldots, 0)\rangle \subseteq K^n$.

Aufgabe 4.3

Gegeben seien $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ zwei teilerfremde Zahlen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 4.4

Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}$ kein direktes Produkt zweier nichttrivialer Untergruppen ist.

(Eine Gruppe G heißt nichttrivial, wenn gilt: $\#G > 1$.)

*** Aufgabe**

Gegeben sei eine endliche Gruppe G mit $\#G = p^n$, wobei p eine Primzahl ist. Zeigen Sie: G ist zyklisch genau dann wenn G abelsch ist und eine eindeutige Untergruppe H in G mit $\#H = p$ existiert.