Prof. Dr. L. Kramer
Dipl.-Math. O. Varghese

5. Hausaufgabenblatt zur Einführung in die Algebra

(**Abgabe:** bis Dienstag 18.11.2014, 12:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 5.1

Gegeben sei eine Gruppe G und eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit $[G : H] = n$. Zeigen Sie, dass ein Homomorphismus

$$\Psi : G \to \mathrm{Sym}(n)$$

existiert, so dass gilt: $\ker(\Psi) \subseteq H$.

Aufgabe 5.2

Zeigen Sie:

i) Gegeben seien Gruppen $G_1, \dots, G_m$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$Z(G_1 \times \ldots \times G_m) = Z(G_1) \times \ldots \times Z(G_m).$$

ii) Für $n \geq 3$ ist $Z(\mathrm{Sym}(n)) = \{id\}$.

iii) Gegeben seien G, H Gruppen und $f : G \to H$ ein Epimorphismus. Zeigen Sie, dass gilt: $f(Z(G)) \subseteq Z(H)$.

iv) Wenn $G/Z(G)$ zyklisch ist, dann ist G abelsch.

Aufgabe 5.3

Sei p eine Primzahl, G eine Gruppe. Zeigen Sie:

i) Wenn $\#G = p^2$, dann ist G abelsch und isomorph zu $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

ii) Wenn $\#G = p^3$, dann ist G abelsch oder es gilt $\#Z(G) = p$.

Aufgabe 5.4

Gegeben sei ein Körper K und eine endliche Gruppe G mit $\#G = n$. Zeigen Sie, dass ein Monomorphismus

$$\Phi : G \to \mathrm{GL}_n(K)$$

existiert.

*** Aufgabe**

Gegeben sei eine Gruppe G. Zeigen Sie, dass die Gruppe der inneren Automorphismen $\mathrm{Inn}(G)$ ein Normalteiler in $\mathrm{Aut}(G)$ ist.