Prof. Dr. L. Kramer
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 14/15

9. Hausaufgabenblatt zur Einführung in die Algebra

(**Abgabe:** bis Dienstag 06.01.2015, 12:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 9.1

Sei R ein Integritätsbereich.

i) Zeigen Sie, dass gilt: $R[T]^* = R^*$.

ii) Sei $r \in R$ irreduzibel (bzw. prim). Zeigen Sie, dass r irreduzibel (bzw. prim) in $R[T]$ ist.

Aufgabe 9.2

Sei R ein Integritätsbereich und $a, b, c \in R$. Zeigen Sie:

i) Wenn d, d' beide größte gemeinsame Teiler von a und b sind, so gibt es $u \in R^*$ mit $d' = d \cdot u$.

ii) Wenn d ein größter gemeinsamer Teiler von a und b ist und wenn $\tilde{d}$ ein größter gemeinsamer Teiler von d und c ist, dann ist $\tilde{d}$ ein größter gemeinsamer Teiler von a, b und c.

Aufgabe 9.3

Lösen Sie: A problem by Sun Zi: "Suppose we have an unknown number of objects. When counted in threes, 2 are left over, when counted in fives, 3 are left over, and when counted in sevens, 2 are left over.

How many objects are there?"

Definition Ein kommutativer Ring R heißt **noethersch**, wenn jede aufsteigende Kette von Idealen stationär wird, d.h. für jede Familie $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Idealen $I_n \trianglelefteq R$, $n \in \mathbb{N}$ mit $I_n \subseteq I_{n+1}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $I_n = I_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Aufgabe 9.4

Zeigen Sie:

i) Hauptidealbereiche sind noethersch.

ii) Ist R ein noetherscher Ring und $I \trianglelefteq R$ ein Ideal, dann ist R/I noethersch.

*** Aufgabe**

Zeigen Sie: Ein kommutativer Ring ist genau dann noethersch, wenn jedes Ideal von endlich vielen Elementen erzeugt wird.