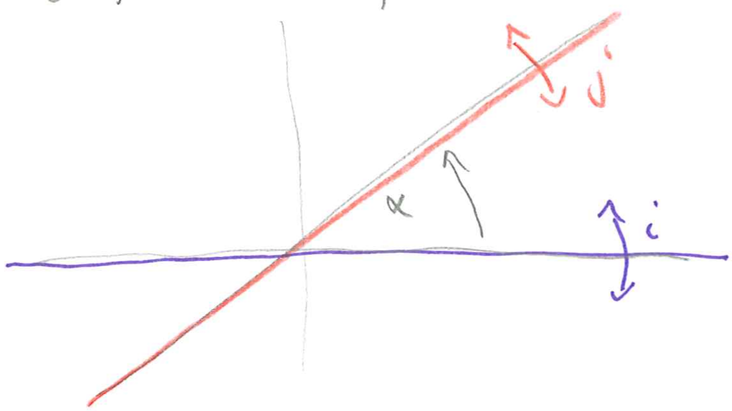
§2 Coxetergruppen

1. Def Eine Gruppe G heißt Diedergruppe, wenn sie von zwei (verschiedenen) Involutionen erzeugt wird, d.h. wenn es Elemente $i, j \in G$ gibt mit $i^2 = j^2 = 1$, $i,j \neq 1$,

$$G = \langle i, j \rangle.$$

Beispiel a) In $\mathbb{R}^2$ sei i die Spiegelung an der x-Achse und j die Spiegelung an einer Geraden, die einen Winkel α, $0 < \alpha < \pi$, zur x-Achse hat



Das Produkt ij ist eine Drehung um den Winkel $2 \cdot \alpha$. Ist also $\alpha = \frac{\pi}{m}$, so hat ij Ordnung m.

b) Das gleiche Beispiel "abstrakt": Sei $C_2 = \{\pm 1\}$ und $A = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, mit $m = 0$ oder $m \geq 2$

Die Gruppe C_2 operiert auf A durch

$$1 : a \mapsto a$$
$$-1 : a \mapsto -a$$

Betrachte das <u>semidirekte Produkt</u>

$$D = C_2 \ltimes A = \{ (\varepsilon, a) \in C_2 \times A \}$$

mit Verknüpfung

$$(\varepsilon, a) \cdot (\delta, b) = (\varepsilon\delta, \delta a + b)$$

Setze $i = (-1, 0) \rightsquigarrow i^2 = (1, 0)$

$j = (-1, 1) \rightsquigarrow j^2 = (1, 0)$

$ij = (-1,0)\cdot(-1,1) = (1,1)$ erzeugt $\{1\} \times A \cong A$

also gilt $D = \langle i, j \rangle$. Ist $m = 0$,

so schreibt man $D = D_\infty = \mathbb{Z}/2 \ltimes \mathbb{Z}$.

Ist $2 \leq m < \infty$, so schreibt man $D = D_m$,

$\# D_m = 2 \cdot m$ (denn A ist Normalteiler vom Index 2).

2. <u>Lemma</u> Sei G eine Diedergruppe, die von den Involutionen $i \neq j$ erzeugt wird. Sei $m = \operatorname{ord}(ij)$, sei $R = \langle ij \rangle$. Dann gilt

(a) $R \trianglelefteq G$ ist Normalteiler, $G = \{1, i\} \ltimes R$ und $[G:R] = 2$

(b) Es gibt (genau) einen Isomorphismus $\varphi : G \to D_m$ mit $\varphi(i) = (-1, 0)$, $\varphi(j) = (-1, 1)$

<u>Beweis</u> Es gilt
$$i(ij)i^{-1} = ji = (ij)^{-1}$$
$$j(ij)j^{-1} = ji = (ij)^{-1}$$
also ist $R = \langle ij \rangle$ normal, $R \trianglelefteq G$.

Weiter ist $i(ij) = j$, also gilt $G = \langle R \cup \{i\} \rangle$ und $G = \{1, i\} \cdot R$. Insbesondere ist $[G : R] \leq 2$.

Wäre $i \in R$, so wäre G abelsch, also $ij = ji = (ij)^{-1}$, also $G \cong \mathbb{Z}/2$ ↯ denn $i \neq j$.

Also gilt $[G : R] = 2$. Damit ist (a) bewiesen.

Wegen $i \neq j$ ist $ij \neq 1$, also $m = \mathrm{ord}(ij) \neq 1$.

Betrachte den Isomorphismus

$$f : \mathbb{Z}/m \longrightarrow R \qquad 1 \longmapsto ij \qquad (m \neq \infty)$$
$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow R \qquad 1 \longmapsto ij \qquad (m = \infty)$$

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, "-1"'] & ij \arrow[d, "\text{konjugieren mit } i"] \\
-1 \arrow[r, mapsto] & ji
\end{tikzcd}$$

kommutiert und liefert Isomorphismus

$$C_2 \ltimes \mathbb{Z}/m \longrightarrow G \qquad (m \neq \infty)$$
$$C_2 \ltimes \mathbb{Z} \longrightarrow G \qquad (m = \infty)$$

$\square$

Coxetergruppen sind (gewisse) von Involutionen erzeugte Gruppen. Wir brauchen dazu Präsentierungen.

3. Def / Erinnerung Sei X eine Menge. Ein reduziertes Wort ist eine formale Folge

$$x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_k^{l_k} \quad \text{mit} \quad k \geq 0, \; l_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \; x_j \in X$$

wobei wir das leere Wort ( ) zulassen.

Sei WX die Menge aller reduzierten Wörter.

Für jedes $x \in X$ definieren wir eine Wirkung von $\mathbb{Z}$ auf WX wie folgt. Ist $w = x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k} \in WX$, $m \in \mathbb{Z}$, so setze

$$x^m w = \begin{cases} x_1^{l_1+m} x_2^{l_2} \cdots x_k^{l_k} & \text{wenn } x = x_1 \text{ und } l_1 + m \neq 0 \\ x_2^{l_2} \cdots x_k^{l_k} & \text{wenn } x = x_1 \text{ und } l_1 + m = 0 \\ x^m x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k} & \text{wenn } x \neq x_1 \text{ und } m \neq 0 \\ x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k} & \text{wenn } m = 0 \end{cases}$$

Das ist eine $\mathbb{Z}$-Wirkung (!) und wir definieren die Freie Gruppe FX als die von all diesen Wirkungen erzeugte Permutationsgruppe auf WX

Man sieht leicht: jedem reduzierten Wort $w = x_1^{e_1} \dots x_k^{e_k}$ kann man die Permutation $v \longmapsto x_1^{e_1}(x_2^{e_2}(x_3^{e_3}(\dots(v)))) \in FX$ zuordnen, die das leere Wort () auf das Wort $x_1^{e_1} \dots x_k^{e_k}$ abbildet. Damit ist die Wirkung von FX auf WX treu, transitiv und frei und wir können FX mit der Menge WX identifizieren. Die freie Gruppe besteht damit aus allen reduzierten Wörtern, die Verknüpfung besteht im Hintereinanderschreiben reduzierter Wörter und abschließendem Streichen von Redundanzen der Form $x^m x^{-m}$

Die freie Gruppe FX hat folgende universelle Eigenschaft. Ist G eine Gruppe und $\varphi: X \to G$ eine Abbildung, so gibt es genau einen Homomorphismus $\Phi: FX \to G$, der φ fortsetzt, d.h. $\Phi(x) = \varphi(x)$ gilt für alle $x \in X$.

<u>Beispiele</u> • $F\emptyset = \{1\}$

• $X = \{x\}$ $F\{x\} \cong \mathbb{Z}$ via $x^m \longmapsto m$

Ist $\# X \geq 2$, so ist FX nicht abelsch.

Sei jetzt $R \subseteq WX$ eine Menge von reduzierten Wörtern, sei $N = \langle g r g^{-1} \mid r \in R, g \in FX \rangle$ der <u>normale Abschluss</u> von R (der kleinste Normalteiler in FX, der R enthält).

Man schreibt

$$FX/N = \langle X \mid R \rangle$$

und nennt dies die durch die <u>Erzeuger</u> X und <u>Relation</u> R definierte Gruppe.

<u>Idee:</u> In $\langle X \mid R \rangle$ gelten genau die Relationen, die aus den Relationen in R nach den Regeln der Gruppentheorie ableitbar sind.

<u>Bsp</u> • $FX = \langle X \mid \emptyset \rangle$

• $\langle a \mid a^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2$, denn

$F\{a\} \cong \mathbb{Z}$, $N \cong 2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

- $\langle a,b \mid [a,b] \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ frei abelsch (üA!)

- $\langle a,b \mid a^2, b^2 \rangle \cong D_\infty$

- $\langle a,b \mid a^2, b^2, (ab)^m \rangle \cong D_m$ für $m \geq 2$

- $\langle a,b \mid a^2, b^3 \rangle \cong PSL_2\mathbb{Z}$ [Serre, Trees I.4.2]

<u>Universelle Eigenschaft von $\langle X \mid R \rangle$</u>: Ist G eine Gruppe mit Erzeugendensystem X und R eine Menge von Relationen der Form $r = 1$, so gibt es genau einen Epimorphismus

$$\langle X \mid R \rangle \longrightarrow G$$

4. <u>Def</u> Sei I eine (endliche) Menge, sei

$$m : I \times I \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad (i,j) \longmapsto m_{ij}$$

eine Matrix mit

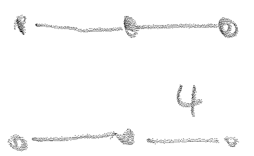
- $m_{ii} = 1$ für alle $i \in I$

- $m_{ij} = m_{ji} \geq 2$ für alle $i,j \in I$, $i \neq j$

Dann heißt $m = (m_{ij})$ <u>Coxeter-Matrix</u>.

Das <u>Coxeter-Diagramm</u> $D(m)$ ist folgender dekorierter Graph. Die Eckenmenge von $D(m)$ ist I und $i \neq j$ werden durch eine Kante verbunden, wenn $m_{ij} \geq 3$ gilt. Ist $m_{ij} \geq 4$, so schreibt man die Zahl m_{ij} an die Kante.

<u>Bsp</u>



Statt $\circ\overset{4}{—}\circ$ malt man oft auch $\circ\!=\!\circ$ (Doppelkante), statt $\circ\overset{6}{—}\circ$ auch $\circ\!\equiv\!\circ$ (Dreifachkante).

Die Matrix läßt sich offensichtlich aus dem Diagramm zurückgewinnen.

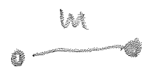
Die zugehörige <u>Coxetergruppe</u> ist

$$W := \langle I \mid (ij)^{m_{ij}}, \text{ wenn } m_{ij} \neq \infty \rangle$$

Beispiele

$\langle i \mid i^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2$

$\langle i, j \mid i^2, j^2, (ij)^2 \rangle$



$\langle i, j \mid i^2, j^2, (ij)^m \rangle \overset{!}{\cong} D_m \quad 2 \le m < \infty$

$\langle i, j \mid i^2, j^2 \rangle \overset{!}{\cong} D_\infty$

$W \overset{!}{\cong} \mathrm{Sym}(k+1)$

Platonische Körper

Symmetriegruppe des Würfels / Oktaeders

Symmetriegruppe des Ikosaeders / Dodekaeders

Symmetriegruppe des Tetraeders

Das Paar (W, I) heißt <u>Coxetersystem</u>.
Das Coxetersystem hängt natürlich von der Coxetermatrix bzw. dem Coxeterdiagramm ab.

5. <u>Def</u> Sei (W, I) ein Coxetersystem, sei $V = \mathbb{R}^I$ mit Basis $(e_i)_{i \in I}$. Wir definieren eine symmetrische Bilinearform $(\,,\,)$ auf V durch

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) & m_{ij} \neq \infty \\ -1 & m_{ij} = \infty \end{cases}$$

Sei $\sigma_i : V \to V$ die lineare Abbildung

$$\sigma_i(v) = v - 2\, e_i\, (e_i, v)$$

Es gilt $\left.\begin{array}{l} \sigma_i(v) = v \Leftrightarrow v \perp_{(,)} e_i \\ \sigma_i(e_i) = -e_i \end{array}\right\} \rightsquigarrow \sigma_i \in GL(V)$

$\sigma_i^2(v) = \sigma_i(v - 2e_i(e_i, v)) = v - 2e_i(e_i,v) + 2e_i(e_i,v) = v$

d.h. $\sigma_i^2 = id \neq \sigma_i$. Man rechnet leicht nach, dass gilt $(\sigma_i(v), \sigma_i(w)) = (v, w)$ d.h. die σ_i lassen die Bilinearform $(\,,\,)$ invariant. (ÜA)

<u>Satz</u> Die Abbildung $I \to GL(V)$, $i \mapsto \sigma_i$ setzt sich fort zu einem Homomorphismus $W \to GL(V)$, der <u>kanonischen linearen Darstellung</u>. Für alle i, j gilt $\operatorname{ord}(\sigma_i \sigma_j) = m_{ij}$

Bew.: Wegen der universellen Eigenschaft von $W = \langle I \mid (ij)^{m_{ij}} \rangle$ reicht es zu prüfen, dass für alle i,j gilt $\mathrm{ord}(\sigma_i \sigma_j) = m_{ij}$.

1. Fall: $m_{ij} = \infty$

$$\sigma_i(e_j) = e_j + 2e_i \rightsquigarrow \sigma_i(e_i+e_j) = e_i + e_j =: f$$

$$\rightsquigarrow \sigma_i(e_j) = f + e_i \quad , \quad \sigma_j(e_i) = f + e_j$$

$$\rightsquigarrow \sigma_i\sigma_j(e_i) = \sigma_i(f+e_j) = 2f + e_i \rightsquigarrow (\sigma_i\sigma_j)^k(e_i) = 2kf + e_i$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{ord}(\sigma_i\sigma_j) = \infty = m_{ij}$$

2. Fall $m_{ij} < \infty$, $i \neq j$. Betrachte $V_0 = \mathrm{span}\{e_i, e_j\}$

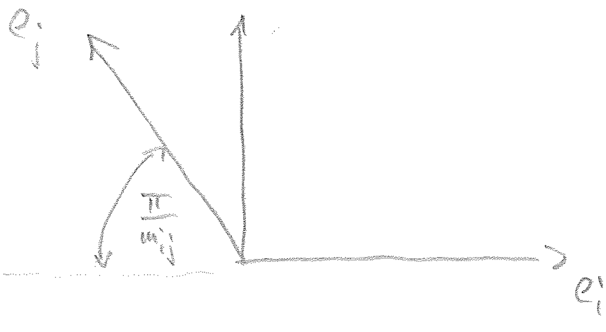
Offensichtlich gilt $\sigma_i(V_0) = V_0 = \sigma_j(V_0)$. Die Gram-Matrix von $(\, , \,)$ auf V_0 ist

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) \quad , \; -1 < \lambda \leq 0$$

Diese Matrix ist positiv definit (ÜA: Spur und Determinante sind positiv!) und es folgt $V = V_0^{\perp} \oplus V_0$, wobei σ_i, σ_j trivial auf $V_0^{\perp}$ operieren. In V_0 gilt

$$\measuredangle(e_i, e_j) = \pi - \frac{\pi}{m_{ij}}$$

Damit ist $\sigma_i\sigma_j$ in V_0 eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{m_{ij}} \Rightarrow \mathrm{ord}(\sigma_i\sigma_j) = m_{ij}$



$\boxed{\text{ÜA}}$

□

<u>Korollar</u> In der Coxetergruppe W gilt Folgendes.

- $\mathrm{ord}(i) = 2$, $ij \neq 1$ für $i \neq j$

- Ist $i \neq j$, so erzeugt $\{i, j\}$ eine Diedergruppe der Ordnung m_{ij} $\langle i, j \rangle_W \cong D_{m_{ij}}$

6. <u>Def</u> Sei G eine Gruppe und sei $X \subseteq G$ ein Erzeugendensystem von G. Für $g \in G$ sei $\ell = \ell_X(g) = \min\left\{ k \mid g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_k^{\varepsilon_k},\ \begin{array}{l} x_i \in X \\ \varepsilon_i = \pm 1 \end{array} \right\}$

die <u>Wortlänge von g bezüglich dem EZS X</u>.

($\ell_X(1) = 0$ per Definition!)

Offensichtlich gilt:

$$\ell(gh) \leq \ell(g) + \ell(h)$$

$$\ell(g) = \ell(g^{-1})$$

und $d_X(g, h) = \ell(g^{-1}h)$ definiert eine $\mathbb{Z}$-wertige <u>Metrik</u> auf G, die <u>Wortmetrik</u> bzgl. X.

Ist insbesondere (W, I) ein Coxetersystem, so haben wir auf W die Wortmetrik bzgl I.

7. <u>Def</u> Sei (W,I) ein Coxetersystem. Wir nennen die Konjugierten der $i \in I$ die <u>Spiegelungen</u> in W,

$$T = \{ w i w^{-1} \mid i \in I, w \in W \}$$

Sei $\Phi = T \times \{\pm 1\}$. Wir nennen die Elemente $\alpha \in \Phi$ <u>Halbräume</u> oder <u>Wurzeln</u>. Für $\alpha = (t, \varepsilon)$ und $i \in I$ setzen wir

$$i \cdot \alpha = \begin{cases} (t, -\varepsilon) = (iti, -\varepsilon) & \text{falls } t = i \\ (iti, \varepsilon) & \text{falls } t \neq i \end{cases}$$

<u>Lemma</u> Sei $i_1, \ldots, i_q$ eine Folge in I, sei

$t_1 = i_1, \quad t_2 = i_1 i_2 i_1, \quad t_3 = i_1 i_2 i_3 i_2 i_1, \ldots \quad \in T.$

Dann gilt:

$$\{ t \in T \mid i_q(i_{q-1} \cdots (i_1(t, \varepsilon))) = (i_q i_{q-1} \cdots t \cdots i_q, -\varepsilon) \}$$

$$\subseteq \{ t_1, t_2, \ldots, t_q \}$$

<u>Beweis</u>
$$i_{k+1} (i_k i_{k-1} \cdots t \cdots i_k, \delta) = (\ldots, -\delta)$$

gilt genau dann, wenn gilt

$$t = i_1 i_2 \cdots i_{k+1} \cdots i_1 = t_{k+1}$$

Für $t \notin \{ t_1, \ldots, t_q \}$ passiert also <u>nie</u> ein VZW. $\square$

<u>Satz</u> Die Abbildung $i \longmapsto [\alpha \longmapsto i.\alpha]$ aus der Definition setzt sich fort zu einem Homomorphismus $W \to \mathrm{Sym}(\Phi)$

<u>Beweis</u> Wir müssen zeigen, dass die Abbildung $[\alpha \mapsto i.\alpha]$ die definierenden Relationen von (W, I) erfüllt.

Klar: $i.(i.\alpha) = \alpha$.

Angenommen $i \neq j$ und $m_{ij} < \infty$. Sei $\alpha = (t, \varepsilon) \in \Phi$

Die Wirkung der i, j auf der ersten Komponente t ist durch Konjugation – das ist ok. Zu betrachten sind die VZW der zweiten Komponente!

Wir wenden das Lemma an mit $q = 2m_{ij}$

$(i_1, i_2, \dots) = (i, j, i, j, \dots, i, j)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} t_1 &= i \\ t_2 &= iji \\ t_3 &= ijiji \\ t_k &= i(ji)^{k-1} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow t_k = t_{k+m_{ij}}$, $ij\,t_k\,ji = t_{k+2}$

Für $t \notin \{t_1, \dots, t_q\}$ gibt es kein VZW, also ist dann alles in Ordnung.

Weiter ist $j(i(t_k, \delta)) = (\underbrace{jit_k ij}_{=t_{k-2}}, -\delta)$

genau dann, wenn gilt:

$$\begin{cases} i = t_k \iff k = 1, m_{ij}+1 \\ \underline{\text{oder}} \\ i \neq t_k \text{ und } j = it_k i \iff t_k = t_2 \iff k = 2, m_{ij}+2 \end{cases}$$

also genau dann, wenn gilt $k \equiv 1, 2 \pmod{m_{ij}}$

Es folgt daraus

$$\underbrace{(ji)(ji)\cdots(ji)}_{m_{ij}} \cdot (t_k, \varepsilon) = (t_k, \varepsilon)$$

weil das Vorzeichen genau zweimal wechselt.

Damit ist auch für $t \in \{t_1, \dots, t_q\}$ alles in Ordnung.

Für $m_{ij} = \infty$ ist nichts zu zeigen. $\square$

<u>Korollar</u> Für jedes $w \in W$ gilt

$$\#\{t \in T \mid w(t,\varepsilon) = (wtw^{-1}, -\varepsilon)\} \leq \ell(w).$$

<u>Beweis</u> Schreibe $w = i_1 \cdots i_q$ mit $i_k \in I$, $q = \ell(w)$.

Nach dem Lemma gilt

$$\{t \in T \mid w.(t,\varepsilon) = (wtw^{-1}, -\varepsilon)\} \subseteq \{t_1, \ldots, t_q\} \qquad \square$$

8. <u>Definition</u> Sei G eine Gruppe, sei $I \subseteq G$ ein Erzeugendensystem aus Involutionen (d.h. für jedes $i \in I$ gilt $i^2 = 1 \neq i$.) Betrachte die beiden folgenden Bedingungen.

(D) "Deletion condition"

Ist $i_1, \ldots, i_q \in I$ und $w = i_1 \cdots i_q$ und gilt $\ell_I(w) < q$, so gibt es $1 \leq r < s \leq q$ mit

$$w = i_1 \cdots \hat{i}_r \cdots \hat{i}_s \cdots i_q$$

weglassen

(E) "Exchange condition"

Ist $i, i_1, \ldots, i_q \in I$ und $w = i_1 \cdots i_q$ und gilt $\ell_I(w) = q$, so ist entweder $\ell(iw) = \ell(w) + 1$

oder $w = i\, i_1 \cdots \hat{i}_r \cdots i_q \qquad 1 \leq r \leq q$

weglassen

Satz Sei (W, I) ein Coxetersystem. Dann gelten die Bedingungen (D) und (E) (bezüglich des EZS $I \subseteq W$).

Beweis

Beh Ist $w = i_1 \cdots i_q$ mit $i_k \in I$ und ist $t_k = i_1 \cdots i_k \cdots i_1$, so gilt $l(w) = q$ genau dann, wenn $\#\{t_1, \dots, t_q\} = q$ gilt.

Beweis der Beh.

Angenommen, $\#\{t_1, \dots, t_q\} = p < q \rightsquigarrow t_r = t_s$ für $1 \leq r < s \leq q \rightsquigarrow i_1 \cdots i_r \cdots i_1 = i_1 \cdots i_r \cdots i_s \cdots i_r \cdots i_1$

$$1 = i_{r+1} \cdots i_s \cdots i_r$$

$$i_r \cdots i_s = i_{r+1} \cdots i_{s-1}$$

$\rightsquigarrow l(w) < q$.

Wir haben gezeigt: $l(w) = q \Rightarrow \#\{t_1, \dots, t_q\} = q$.

Angenommen, $l(w) = p < q$. Dann gibt es $j_1, \dots, j_p \in I$ mit $w = j_1 \cdots j_p$. Setze $t_k' = j_1 \cdots j_k \cdots j_1$, und $X = \{t \in T \mid w(t, \varepsilon) = (wtw^{-1}, -\varepsilon)\}$

Wir wissen schon, dass $\#\{t_1', \dots, t_p'\} = p$.

Anwenden von i_{k+1} auf $(i_k \cdots i_1 t i_1 \cdots i_k, \varepsilon)$ (bzw von j_{k+1} auf $(j_k \cdots j_1 t j_1 \cdots j_k, \varepsilon)$) liefert VZW genau dann, wenn $t = t_{k+1}$ (bzw. wenn $t = t_{k+1}'$) gilt. Da die t_k' paarweise verschieden sind, folgt $X = \{t_1', \dots, t_p'\} \subseteq \{t_1, \dots, t_q\}$.

Da wir $p < q$ angenommen haben, passiert bei den t_k ein VZW zweimal, d.h. es gibt $1 \le r < s \le q$ mit $t_r = t_s \Rightarrow \# \{t_1, \dots, t_q\} < q$. $\square$

<u>Nun folgt (D):</u>

Angenommen, $w = i_1 \cdots i_q$ und $l(w) < q$.

$\Rightarrow t_r = t_s$ für $1 \le r < s \le q$.

$\Rightarrow i_r \cdots i_s = i_{r+1} \cdots i_{s-1}$ wie behauptet.

<u>(E) ist formale Konsequenz von (D):</u>

$$l(iw) \neq l(w) + 1 = q + 1 \qquad w = i_1 \cdots i_q \qquad i = i_0$$

$$\Rightarrow i i_1 \cdots i_q \overset{(D)}{=} i_0 \cdots \hat{i}_r \cdots \hat{i}_s \cdots i_q$$

und $r = 0$, sonst wäre $l(w) < q$. $\square$

<u>Bem</u> Aus dem Beweis folgt: ist $l(w) = q$ und $w = i_1 \cdots i_q$, $t_k = i_1 \cdots i_k \cdots i_1$, so gilt

$\{t_1, \ldots, t_q\} = \{t \in T \mid w(t, c) = (wtw^{-1}, -\varepsilon)\}$

sowie $\# \{t_1, \ldots, t_q\} = q$.

9. <u>Das Wortproblem</u>. Gegeben sei $G = \langle X | R \rangle$ mit X, R endlich (man sagt: G ist eine <u>endlich präsentierte Gruppe</u>) und eine Folge

$x_1, \ldots, x_k \in X$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \{\pm 1\}$.

Das <u>Wortproblem</u> ist die Frage, ob es einen Algorithmus gibt, der entscheidet, ob

$$x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_k^{\varepsilon_k} = 1 \quad \text{in } G \text{ gilt.}$$

Novikov hat 1954 gezeigt, dass es Gruppen gibt, für die das Wortproblem <u>unentscheidbar</u> ist! Andererseits gibt es Klassen von Gruppen, für die es entscheidbar ist, z.B. freie Gruppen (klar) und Coxetergruppen.

10. <u>Def</u> Sei G eine Gruppe mit EZS $X \subseteq G$. Wir nennen eine Darstellung $w = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_q^{\varepsilon_q}$, $x_k \in X$, $\varepsilon_k = \pm 1$ <u>reduziert</u>, wenn gilt

$$l_X(w) = q.$$

11. <u>Def</u> Sei G eine Gruppe und sei $I \subseteq G$ ein (endliches) EZS aus Involutionen. Betrachte die beiden folgenden Operationen auf endlichen Folgen in I:

(1) Streiche eine Teilfolge (i,i)

(2) Ist $m = \mathrm{ord}(ij)$, so ersetze eine Teilfolge

$$\underbrace{(i,j,i,\ldots)}_{m} \text{ durch } \underbrace{(j,i,j,\ldots)}_{m}$$

Wir nennen zwei Folgen <u>M-homotop</u>, wenn sie durch Operationen vom Typ (2) auseinander hervorgehen. Wir nennen sie <u>M-äquivalent</u>, wenn sie durch Operation (2), (1) und (1) "rückwärts" auseinander hervorgehen. Eine Folge heißt <u>M-reduziert</u>, wenn es keine M-äquivalente kürzere Folge gibt. ("M" steht für die Matrix $M_{ij} = \mathrm{ord}(ij)$)

Offensichtlich stellen M-äquivalente Folgen das gleiche Gruppenelement dar, und reduzierte Darstellungen sind stets M-reduziert.

<u>Satz</u> Sei G eine von einer Menge I von Involutionen erzeugte Gruppe. Wenn die "deletion condition" (D) und damit auch die "exchange condition" (E) gilt (vgl. §2.8), so gilt folgendes.

(a) M-reduzierte Folgen sind reduziert.

(b) zwei M-reduzierte Folgen stellen genau dann das gleiche Element dar, wenn sie M-homotop sind

<u>Beweis</u>

<u>1. Schritt</u>: Ist $w = i_1 \cdots i_q = j_1 \cdots j_q$ mit $l(w) = q$, so sind $(i_1, \ldots, i_q)$ und $(j_1, \ldots, j_q)$ M-homotop.

<u>Bew</u>: Für $q = 0, 1$ ist das klar. Induktion nach q. Ist $i_1 = j_1$, so ist die Beh. klar nach Induktion.

Ist $i_1 \neq j_1$ setze $m = \mathrm{ord}(i_1 j_1) \geq 2$.

Beh: Dann gilt $w = \underbrace{(i_1 j_1 \cdots)}_{m} X_{m+1} \cdots X_q$ (und $m < \infty$)

$= (j_1 i_1 \cdots) X_{m+1} \cdots X_q$, $X_r \in I$

Aus der Behauptung folgt nun:

$$i_1 i_2 \cdots i_q \underset{M\text{-hom}}{\overset{\text{Ind}}{\sim}} i_1 j_1 \cdots X_{m+1} \cdots X_q \underset{M\text{-hom}}{\sim} j_1 i_1 \cdots X_{m+1} \cdots X_q$$

$$\underset{M\text{-hom}}{\overset{\text{Ind}}{\sim}} j_1 j_2 \cdots j_q$$

$\rightsquigarrow$ fertig mit Schritt 1.

Beweis der Behauptung mit (E)

$$\ell(j_1 i_1 \cdots i_q) < q+1 \overset{(E)}{\Longrightarrow} i_1 \cdots i_q = j_1 i_1 \cdots \hat{i}_k \cdots i_q$$

und $k \neq 1$ wegen $i_1 \neq j_1$

$\Rightarrow i_1 \cdots i_q = j_1 i_1 w_{q-2}$, $\ell(w_{q-2}) = q-2$

$m = 2 \rightsquigarrow$ fertig

$m > 2 \rightsquigarrow$ wende wieder (E) an, erhalte

$i_1 \cdots i_q = i_1 j_1 i_2 w_{q-3}$ usw

Wäre $m = \infty$, könnten wir damit beliebig fortfahren $\lightning$ $\Rightarrow m < \infty$, nach endlich vielen Schritten steht die Behauptung da. $\square$

2. Schritt (a) gilt.

Wäre das falsch, so gäbe es ein Gegenbeispiel $w = \dot{i}_1 \cdots \dot{i}_q$ M-reduziert, $\ell(w) < q$ und q minimal. Dann ist $q \geq 2$ und

$v = \dot{i}_2 \cdots \dot{i}_q$ ist sowohl reduziert als auch M-reduziert. Da $\ell(\dot{i}_1 v) \leq q - 1$ folgt mit (E): $v = \dot{i}_1 x_2 \cdots x_{q-2}$, $x_k \in I$

$$\begin{array}{c} \downarrow \text{ M-homot} \\ \dot{i}_2 \dot{i}_3 \cdots \dot{i}_q \end{array}$$

also $\dot{i}_1 \cdots \dot{i}_q \sim \dot{i}_1 \dot{i}_1 x_2 \cdots x_{q-2} \sim x_2 \cdots x_{q-2}$ $\lightning$

3. Schritt (b) gilt.

Das folgt aus 3. Schritt + 2. Schritt. $\square$

Ergänzung Ist $w = i_1 \cdots i_q$ mit $\ell(w) < q$, so gibt es eine zu $(i_1, \dots, i_q)$ M-homotope Folge $(j_1, \dots, j_q)$, die sich mit einer Operation (1) (Streichen von Teilwort ii) verkürzen läßt.

Beweis Induktion nach q. Für $q = 1, 2$ ist das klar.

Ist $i_2, \dots, i_q$ nicht M-reduziert, so folgt die Beh. nach Induktionsannahme. Ist $(i_2, \dots, i_q)$ reduziert, so gilt nach (E) $i_1 i_2 \cdots i_q = i_1 i_2 \cdots \hat{i_k} \cdots i_q$

$$\underset{\text{M-homotop}}{\sim} i_2 \cdots i_q \text{, also auch } i_1 \cdots i_q \underset{\text{M-homotop}}{\sim} i_q i_1 i_2 \cdots \hat{i_k} \cdots i_q$$

$$\big\downarrow (1)$$

$$i_2 \cdots \hat{i_k} \cdots i_q$$

$\square$

Bem Damit erhalten wir einen Algorithmus zum Reduzieren: zähle alle zu $i_1, \dots, i_q$ M-homotopen Wörter auf. Wenn sich keines durch Operation (1) verkürzen läßt, so ist $i_1, \dots, i_q$ reduziert. Andernfalls wende Operation (1) an und wiederhole das Verfahren. Insbesondere läßt sich das Wortproblem lösen.

Computeralgebra-Programme wie LiE von Marc van Leeuwen (→ google) können sehr gut in Coxetergruppen rechnen.

12. Satz (Matsumoto)

Sei W eine durch eine Menge I von Involutionen erzeugte Gruppe. Wenn (E) in W gilt, dann ist (W, I) ein Coxetersystem.

Beweis: Für $i, j \in I$ sei $m_{ij} = \operatorname{ord}(ij)$. Sei $\tilde{W}$ die zugehörige Coxetergruppe. Betrachte den kanonischen Epimorphismus $\tilde{W} \xrightarrow{\varphi} W$.

Angenommen, $w = i_1 \cdots i_q$ ist im Kern von φ. Dann läßt sich die Folge $\varphi(i_1), \ldots, \varphi(i_q)$ in W in das leere Wort transformieren durch Operationen (1) und (2). Jede dieser Operationen läßt sich auch in $\tilde{W}$ durchführen, also ist $w = 1$.

$\square$

Korollar: Ist (W, I) ein Coxetersystem und $J \subseteq I$, so ist die von J erzeugte Untergruppe $W_J = \langle J \rangle \leq W$ eine Coxetergruppe und (W_J, J) ein Coxetersystem.

Beweis: Die Operationen (1) und (2) verringern höchstens die Menge der benutzten Buchstaben in einer Folge. Ist also $w \in W_J$, $w = j_1 \cdots j_q$

mit $j_k \in J$, läßt sich w auch reduziert darstellen mit Buchstaben aus J. Insbesondere gilt $l_J(w) = l_I(w)$. Damit ist klar, dass (E) in (W_J, J) gilt. $\square$

<u>Korollar</u> Für $J, K \subseteq I$ gilt $W_J \cap W_K = W_{J \cap K}$,

Weiter gilt $W_J = W_K \Leftrightarrow J = K$

$W_J \subseteq W_K \Leftrightarrow J \subseteq K$.

<u>Beweis</u> Klar: $W_{J\cap K} \subseteq W_J \cap W_K$.

Ist $w \in W_J \cap W_K$, so läßt sich w reduziert darstellen mit Buchstaben in J oder mit Buchstaben in K. Operation (2) ändert die verwendeten Buchstaben aber nicht, also $w \in W_{J \cap K}$.

Klar: $J \subseteq K \Rightarrow W_J \subseteq W_K$. Ist $j \in J \cap W_K$, so ist j reduziert, also $j \in K$, damit $J \nsubseteq K \Rightarrow W_J \nsubseteq W_K$ und $W_J = W_K \Rightarrow J = K$ $\square$

<u>Def</u> Sei (W, I) ein Coxetersystem.

Die Untergruppen W_J, $J \subseteq I$ heißen <u>Standard parabolische Untergruppen</u> von W.

13. <u>Def</u> Sei (W,I) ein Coxetersystem. Sei $\mathcal{U}$ folgende Überdeckung von W:
$\mathcal{U} = \{ w W_{I-\{i\}} \mid w \in W,\ i \in I \}$. Der
<u>Coxeterkomplex</u> $\Sigma = \Sigma(W,I)$ ist der Nerv $N(\mathcal{U})$

Andere Beschreibung:

$a = \{ w_1 W_{I-\{i_1\}}, \dots, w_r W_{I-\{i_r\}} \}$ Simplex $\Leftrightarrow$

$\exists w \in W \quad w \in w_k W_{I-\{i_k\}} \qquad k = 1, \dots, r \Leftrightarrow$

$\exists w \in W \quad w W_{I-\{i_k\}} = w_k W_{I-\{i_k\}} \qquad k = 1, \dots, r \Leftrightarrow$

$a = \{ w W_{I \setminus \{j\}} \mid j \in J = \{ i_1, \dots, i_k \} \}$.

Diese Menge ist eindeutig bestimmt durch die Nebenklasse $w W_{I \setminus J}$, denn

$$a = \{ w W_{I \setminus \{j\}} \mid j \in J \}$$
$$= \{ v W_{I \setminus \{j\}} \mid v W_{I \setminus \{j\}} \supseteq w W_J \}$$

Als partiell geordnete Menge ist $\Sigma(W,I)$ damit isomorph zur Menge der Nebenklassen

$$\bigcup \{ W / W_K \mid K \subseteq I \}$$

geordnet durch "$\supseteq$": Nebenklassen "größer" parabolische Untergruppen entsprechen "kleinen" Simplices (was natürlich genau so sein muss).

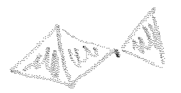
Der Coxeterkomplex Σ hat einige Eigenschaften, die wir jetzt betrachten

14. <u>Def:</u> Kammerkomplex.

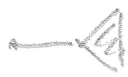
Sei Δ ein Simplizialkomplex wie in §1.2.

Wir nennen Δ <u>rein</u>, wenn jeder Simplex in einem maximalen Simplex enthalten ist und wenn alle maximalen Simplices die gleiche Dimension haben:

rein



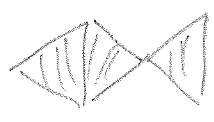
nicht rein



Dann heißen die maximalen Simplices <u>Kammern</u>.

Der <u>Kammerngraph</u> eines reinen Simplizialkomplex ist folgender Graph. Die Ecken sind die Kammern, zwei Kammern a, b bilden eine Kante wenn gilt $\dim(a \cap b) = \dim(a) - 1$

Δ



Kammergraph

Wenn der Kammergraph zusammenhängend ist, so heißt Δ <u>Kammerkomplex</u>. Wege im Kammergraph heißen dann <u>Galerien</u>

<u>Lemma</u> Jeder Coxeterkomplex $\Sigma(W, I)$ ist ein Kammerkomplex.

<u>Bew:</u> Die Simplizes entsprechen genau den Nebenklassen wW_K, die maximalen Simplizes also genau den Gruppenelementen von W. Folglich ist Σ rein. Die Simplizes der Kodimension 1 entsprechen genau den Nebenklassen $wW_{\{i\}} = \{w, wi\}$ (weil $W_i = \{1, i\}$). Damit ist der Kammergraph von Σ genau der <u>Cayleygraph</u> von (W, I): zwei Element (= Kammern) w, v bilden genau dann eine Kante, wenn $w^{-1}v \in I$ gilt. Die Galerien in Σ sind Folgen

$$w, wi_1, wi_1i_2, wi_1i_2i_3, \ldots \qquad i_k \in I.$$

Da I W erzeugt, ist Σ ein Kammerkomplex.

$\square$

15. __Def__ Seien Δ_1, Δ_2 Simplizialkomplexe. Eine Abbildung $\varphi: \Delta_1 \to \Delta_2$ heißt __reguläre simpliziale Abbildung__, wenn φ ordnungserhaltend (d.h. $a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$) und dimensionserhaltend ($\dim(a) = \dim \varphi(a)$) ist.

__Beispiel__ (W, I) Coxetersystem, $\Sigma = \Sigma(W, I)$ Coxeterkomplex

(1) Für jedes $g \in W$ ist die Abbildung

$$g: wW_J \longrightarrow gwW_J$$

ein (regulärer simplizialer) Automorphismus von Σ. Der Stabilisator jeder Kammer ist trivial und W operiert transitiv auf den Kammern (d.h. __scharf transitiv__)

(2) Die __Typfunktion__ oder __Akkordeon-Abbildung__

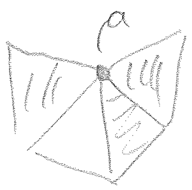
$$t: \Sigma \to (\mathcal{P}(I), \subseteq)$$
$$wW_K \longmapsto I - K$$

wohldefiniert nach § 2.12

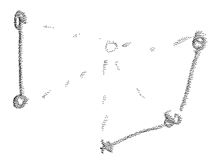
<u>16. Def</u> Eine Teilmenge $\Delta' \subseteq \Delta$ eines Simplizialkomplex ist ein <u>Unterkomplex</u>, wenn die Inklusion $\Delta' \hookrightarrow \Delta$ eine reguläre simpliziale Abbildung ist.
Äquivalent: aus $b \subseteq a \in \Delta'$ folgt $b \in \Delta'$.

<u>Bsp</u> $a \in \Delta$. Der <u>Link</u> von a ist

$$lk(a) = lk_\Delta(a) = \{ b \in \Delta \mid a \cap b = \emptyset,\ a \cup b \in \Delta \}$$



$lk(a)$



<u>Beachte auch</u> $lk(a)$ ist als partiell geordnete Menge isomorph zu $\Delta_{\geq a} = \{ x \in \Delta \mid x \geq a \}$

via
$$lk(a) \to \Delta_{\geq a}, \quad b \longmapsto a \cup b$$

[Aber $\Delta_{\geq a}$ ist i.a. <u>kein</u> Unterkomplex von Δ (warum?)!]

<u>Konstruktion</u> Sind $(P, \leq_P)$ und $(Q, \leq_Q)$ partiell geordnete Mengen, so ist der <u>Join</u> $P * Q$ die Menge $P \times Q$ mit der

partiellen Ordnung $(x,y) \le (u,v) \Leftrightarrow$
$x \le u$ und $y \le v$.

Der Join von zwei Simplizialkomplexen ist wieder ein Simplizialkomplex,

$$\Delta = \Delta_1 * \Delta_2$$

$\mathrm{Vert}(\Delta) = \mathrm{Vert}(\Delta_1) \,\dot\cup\, \mathrm{Vert}(\Delta_2)$

Unterkomplexe $\Delta_1 \cong \Delta_1 * \emptyset \hookrightarrow \Delta_1 * \Delta_2$

$\Delta_2 \cong \emptyset * \Delta_2 \hookrightarrow \Delta_1 * \Delta_2$

Sind Δ_1, Δ_2 Kammerkomplexe, so ist auch $\Delta_1 * \Delta_2$ und $\mathrm{Cham}(\Delta) = \mathrm{Cham}(\Delta_1) \times \mathrm{Cham}(\Delta_2)$

$\boxed{\text{Ü4}}$

Für die Homologiegruppen gilt:

$$H_{k+1}(\Delta_1 * \Delta_2) \cong H_k(\Delta_1 \times \Delta_2, \Delta_1 \vee \Delta_1)$$

Bsp a) $\Delta_2 = \emptyset \rightsquigarrow \Delta_1 * \Delta_2 \cong \Delta_1$

b) $\Delta_2 = \{v\}$ $\quad \Delta_1 * v$ "Kegel über Δ_1"

c) $\Delta_2 = \underbrace{\{v,w\}}_{= S^0}$ $\quad \Delta_1 * S^0$ "Einhängung (Suspension) von Δ_1"

17. Satz Sei (W,I) Coxetersystem und sei $\Sigma = \Sigma(W,I)$ der zugehörige Coxeterkomplex.

(a) Für $J \subseteq I$ und $w \in W$ gilt

$$lk_\Sigma(wW_J) \cong \Sigma(W_J, J)$$

(b) Ist $I = J \dot\cup K$ und gilt $m_{jk} = 2$ für alle $j \in J$, $k \in K$, so gilt

$$W = W_J * W_K$$

$$\Sigma(W,I) = \Sigma(W_J, J) * \Sigma(W_K, K).$$

__Beweis__ a) $uW_K \subseteq wW_J \iff w^{-1}uW_K \subseteq W_J \iff$

$\iff K \subseteq J$ und $w^{-1}u \in W_J$

also $\Sigma_{\geq wW_J} \cong \Sigma_{\geq W_J} \cong \Sigma(W_J, J)$

(b) Für $j \in J$, $k \in K$ gilt $jk = kj \Rightarrow$

$[W_J, W_K] = 1$. Da $W = \langle J \cup K \rangle = \langle W_J \cup W_K \rangle$ gilt, ist $W = W_J W_K$ und $W_J \cap W_K = W_\emptyset = \{1\}$.

Ist $w \in W$, $L \subseteq I$ so zerlege $w = u \cdot v$ mit $u \in W_J$, $v \in W_K$. Es folgt

$wW_L = wW_{L\cap J} W_{L \cap K} = uvW_{L\cap J} W_{L\cap K} =$

$uW_{L\cap J} \cdot vW_{L \cap K}$ $\square$