§ 3 Gebäude

1. <u>Def</u> Sei I endliche Menge. Wir fassen die Potenzmenge $\mathcal{P}(I)$ als $(\#I-1)$-dimensionalen Simplizialkomplex auf.

Ein <u>Simplizialkomplex über I</u> ist ein Simplizialkomplex Δ mit einer regulären simplizialen Abbildung $t: \Delta \to \mathcal{P}(I)$. Mit anderen Worten: jeder Ecke v wird eine "Farbe" $t(v)$ gegeben, so dass in jedem Simplex jede Farbe höchstens einmal auftritt.

Ein <u>Homomorphismus über I</u> ist ein kommutierendes Diagramm simplizialer Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \Delta_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "t_1"'] & & \Delta_2 \arrow[dl, "t_2"] \\ & \mathcal{P}(I) & \end{tikzcd}$$

<u>Bsp</u> (W,I) Coxetersystem, $\Sigma = \Sigma(W,I)$ mit $t(wW_J) = I - J$. Jedes $g \in \Sigma$ liefert <u>Automorphismus über I</u>

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "t"'] & & \Sigma \arrow[dl, "t"] \\ & \mathcal{P}(I) & \end{tikzcd}$$

2. <u>Def</u> (Gebäude)

Sei (W,I) ein Coxetersystem. Ein <u>Gebäude</u> vom Typ (W,I) besteht aus einem Simplizialkomplex Δ über I und einer Menge $\mathcal{A}$ von Unterkomplexen von Δ mit folgenden Eigenschaften.

(G1) Für jedes $\Sigma \in \mathcal{A}$ gibt es einen Isomorphismus
$\varphi : \Sigma(W,I) \xrightarrow{\cong} \Sigma \subseteq \Delta$ über I

(G2) Sind $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{A}$ und $a,b \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ so gibt es einen Isomorphismus $\psi : \Sigma_1 \xrightarrow{\cong} \Sigma_2$ über I, der a,b fest lässt.

(G3) Ist $a,b \in \Delta$ so gibt es $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $a,b \in \Sigma$.

Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen <u>Appartements</u> und $\mathcal{A}$ heißt <u>Appartementsystem</u>.

Offensichtlich sind Gebäude Kammerkomplexe (wegen (G3)).

<u>Beispiel</u> $\Sigma = \Delta$, $\mathcal{A} = \{\Sigma\}$ $\leadsto$ Coxeterkomplexe sind Gebäude.

Im Coxeterkomplex Σ gilt: jedes Simplex der Kodimension 1 ist in <u>genau zwei</u> Kammern enthalten

$w \quad wi$ Kammern

$\setminus \quad /$

$\{w, wi\}$ Kodim-1-Simplex

Deswegen gilt in jedem Gebäude: jedes Kodimension-1-Simplex ist in <u>mindestens 2 Kammern enthalten</u>.

<u>Def</u> Ein Gebäude heißt <u>dick</u>, wenn jedes Kodim.-1-Simplex in <u>mindestens drei</u> Kammern liegt.

Es heißt <u>dünn</u>, wenn jedes Kodim-1-Simplex in <u>genau zwei</u> Kammern liegt.

$\boxed{\text{ÜA:}}$ Die dünnen Gebäude sind genau die Coxeterkomplexe.

<u>Def</u> Sei $a \in \Delta$ ein Simplex von Kodimension 1 und Typ $t(a) = I - \{j\}$. Die Menge aller Kammern $C \supseteq a$ oberhalb von a heißt <u>Panel</u> (Paneele) vom Typ j. Also

Δ <u>dünn</u> $\Leftrightarrow$ alle Panels haben Kardinalität 2 $\Leftrightarrow$ $\Delta \cong \Sigma(W, I)$

Δ <u>dick</u> $\Leftrightarrow$ alle Panels haben Kardinalität ≥ 3

Erinnerung: Eine Galerie ist ein Weg im Kammergraphen. Wegen (G3) gibt es zwischen zwei Kammern in einem Gebäude stets eine Galerie.

3. Beispiele

a) Diagramm A_1 $\bullet$ $W = \langle i \mid i^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2$ $I = \{i\}$

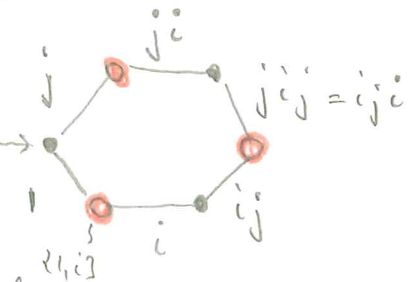
Coxeterkomplex $\Sigma(W, I)$ $\circ$ $\circ$

Gebäude vom Typ A_1 sind Mengen mit mindestens 2 Elementen, Appartements sind 2-elementige Teilmengen.

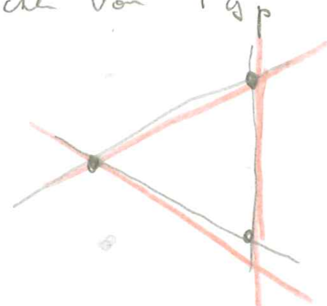
b) Diagramm A_2 $\bullet\!-\!\bullet$ $W = \langle i,j \mid i^2, j^2, (ij)^3 \rangle = D_3$

Diedergruppe der Ordnung 6

$\Sigma_{\{i,j\}}$



Nenne Ecke vom Typ i Punkte und Ecke vom Typ j Geraden



Punkte Geraden Fahnen

Dicke Gebäude: Sei (P, L, F) $F \subseteq P \times L$

projektive Ebene, d.h. durch zwei Punkte $p, q \in P$, $p \neq q$ geht immer genau eine Gerade, zwei Geraden $l, m \in L$, $l \neq m$ schneiden sich immer in genau einem Punkt, auf jeder Gerade mindestens 3 Punkte

Bsp K Körper $P = \{V \leq K^3 \mid \dim V = 1\}$

$L = \{W \leq K^3 \mid \dim W = 2\}$

$(V, W) \in F \Leftrightarrow V \leq W$

$\Delta = \{ \{p\}, \{\ell\}, \{p,\ell\} \mid (p,\ell) \in F \}$ mit

$t(p) = i$, $t(\ell) = j$
$p \in P$, $\ell \in L$

Appartments: Dreiecke in der proj. Ebene

#

c) Diagramm A_m

$I = \{ s_1, \ldots, s_n \}$

Epimorphismus $W \longrightarrow \mathrm{Sym}(\{1, \ldots, n+1\})$

$s_j \longmapsto (j, j+1)$ Transposition, die j und $j+1$ vertauscht

$(j, j+1)^2 = id$ $\quad (j+1, j+2)(j+1, j) = \underbrace{(j, j+2, j+1)}_{3\text{-Zykel}}$

$((j+1, j+2)(j+1, j))^3 = id$

also erhalten wir einen Epimorphismus $W \to \mathrm{Sym}(\{1, \ldots, n+1\})$, Man kann zeigen, dass diese Abbildung <u>injektiv</u> ist (üA), also $W \cong \mathrm{Sym}(\{1, \ldots, n+1\})$, $\# W = (n+1)!$

Sei K Körper oder Schiefkörper, $V = K^{m+1}$ und sei $\Delta = \Delta(V)$ der Fahnenkomplex.

Für jede Basis $\mathcal{B} = \{ b_1, \ldots, b_{m+1} \}$ von V

Sei $\Sigma(\mathfrak{B})$ die Menge aller Fahnen $\{U_1, \ldots, U_k\}$, wo jedes U_i von einer (echten) Teilung von $\mathfrak{B}$ aufgespannt wird. Man kann zeigen: $\Sigma(\mathfrak{B}) \cong \Sigma(W, I)$ ist ein Coxeterkomplex und $\Delta(V)$ ist ein Gebäude. Lemma 1.3 sagt genau, dass G3 gilt. Ein direkter Beweis ist allerdings mühsam, wir werden später einen eleganten Zugang über Gruppen haben, der diese Aussage liefert! Das machen wir im nächsten Kapitel.

4. <u>Def</u> + <u>Satz</u>

Sei Δ Gebäude vom Typ (W, I) mit Appartmentsystem $\mathcal{A}$. Sei $b \in \Delta$ ein Simplex vom Typ $t(b) = J \subsetneq I$ und sei

$A_b = \{\Sigma \cap lk(b) \mid \Sigma \in \mathcal{A},\ b \in \Sigma\}$.

<u>Satz</u> (Residuensatz) $lk(b)$ ist ein Gebäude vom Typ $(W_{I-J}, I-J)$ und Appartmentsystem $\mathcal{A}_b$.

<u>Beweis</u> Benutze den Isomorphismus $\Delta_{\geq b} \cong lk(b)$.

Für $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $b \in \Sigma$ gilt $\Sigma_{\geq b} \cong \Sigma(W_{I-J}, I-J)$ nach §2.17 a), also gilt (G1).

Ist $a, c \in lk(b)$, so betrachte $a \cup b$ und $c \cup b$.

Ist $a \cup b, c \cup b \in \Sigma_1, \Sigma_2$ so gibt es Isom.

$\psi: \Sigma_1 \to \Sigma_2$, der $a \cup b$ und $c \cup b$ festlässt damit gilt (G2). Wegen (G3) gibt es auch $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $a \cup b, c \cup b \in \Sigma$, also gilt (G3) in $lk(b)$. $\square$

5. <u>Zerlegungen.</u>
Angenommen, Δ_i ist für $i = 1,2$ Gebäude vom Typ (W_i, I_i) mit Appartmentsystem $\mathcal{A}_i$.
Dann ist auch $\Delta_1 * \Delta_2$ Gebäude vom Typ $(W_1 \times W_2, I_1 \dot\cup I_2)$ mit Appartmentsystem $\{\Sigma_1 * \Sigma_2 \mid \Sigma_i \in \mathcal{A}_i\}$.
Der Beweis ist einfach und braucht keine besonderen Ideen.

6. Nun nehmen wir an, dass das Coxetersystem (W,I) zerfällt ist, $I = J \dot\cup K$, $jk = kj$ für alle $j \in J$, $k \in K$. Nach §2.17 gilt $W \cong W_J \times W_K$ und $\Sigma(W,I) \cong \Sigma(W_J, J) * \Sigma(W_K, K)$.
Sei nun Δ ein Gebäude vom Typ (W,I) mit Appartmentsystem $\mathcal{A}$.

Behauptung: Sind $a, b \in \Delta$ mit Typen $t(a) = J$, $t(b) = K$, so ist $c = a \cup b \in \Delta$.

Beweis: Wähle Appartment $\Sigma \subseteq \Delta$ mit $a, b \in \Sigma$. Es folgt $a \cup b \in \Sigma \subseteq \Delta$. $\square$

Satz: Ist das Coxetersystem (W, I) reduzibel, $I = J \dot\cup K$ mit $[J, K] = 1$ und ist Δ ein Gebäude vom Typ (W, I), so ist Δ ein Join von Gebäuden vom Typ (W_J, J) und (W_K, K).

Beweis: Sei $a_0, b_0 \in \Delta$ mit $t(a_0) = J$, $t(b_0) = K$. Dann ist $c_0 = a_0 \cup b_0 \in \Delta$ Kammer. Beh: $\Delta = lk(a_0) * lk(b_0)$. Ist nämlich $c \in \Delta$ Kammer, $c = a \cup b$ mit $t(a) = J$, $t(b) = K$, so gilt $a \cup b_0, a_0 \cup b \in \Delta \Rightarrow a \in lk(b_0)$ und $b \in lk(a_0) \Rightarrow c \in lk(a_0) * lk(b_0)$. $\square$

Mit dem vorigen Satz lassen sich viele Fragen zu Gebäuden auf den irreduziblen Fall zurückführen, wo das Coxeterdiagramm zusammenhängend ist.

An dieser Stelle seien zwei ganz allgemeine Sätze erwähnt:

<u>Tits</u>: Es gibt keine dicken Gebäude vom Typ

H_3 $\circ\!-\!\!-\!\circ\!\overset{5}{-\!\!-}\!\circ$

Die Coxetergruppe H_3 ist die Isometriegruppe des Dodekaeders / Ikosaeders.

<u>Ronan-Tits</u>: Ist Γ ein Coxeterdiagramm, das <u>kein</u> Teildiagramm vom Typ H_3 hat, so existiert ein dickes Gebäude vom Typ Γ.

7. <u>Definition + Satz</u>

Sei Δ ein Gebäude vom Typ (W,I) mit Apartmentsystem, sei $\Sigma_0 \in \mathcal{A}$ ein Apartment und sei $c_0 \in \Sigma_0$ eine Kammer.

Wir konstruieren eine <u>Retraktion</u> $\rho = \rho_{\Sigma_0, c_0} : \Delta \to \Sigma_0$ wie folgt.

Ist $a \in \Delta$ ein beliebiger Simplex, so wähle $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $c_0, a \in \Sigma$. Nach Axiom (G2) gibt es einen Isomorphismus $\Sigma \to \Sigma_0$ über I, der c_0 fest läßt. Wir setzen $\rho(a) = \varphi(a)$.

<u>Behauptung</u>: $\rho(a)$ hängt nicht von Σ ab.

<u>Beweis</u> Ist $\Sigma' \in A$ mit $a, c_0 \in \Sigma'$, so gibt es Iso $\varphi' : \Sigma' \xrightarrow{\cong} \Sigma_0$ über I, der c_0 fest läßt.

Dann ist $\varphi^{-1} \circ \varphi' : \Sigma' \to \Sigma$ ein Isomorphism, der c_0 fest läßt. Nach ÜA 5.2 ist $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ eindeutig bestimmt. Nach (G2) gibt es ein Isomorphis $\Sigma' \to \Sigma$ über I, der c_0 und a fest läßt.
Folglich gilt $\varphi^{-1} \circ \varphi'(a) = a \rightsquigarrow \varphi'(a) = \varphi(a)$. $\square$

Offensichtlich ist ρ ein regulär simplizialer Homomorphismus über I. Es gilt nach Konstruktion:

$$\rho(\Delta) = \Sigma_0$$

$$\rho^2 = \rho \quad , \quad \rho(a) = a \text{ gdw } a \in \Sigma_0$$

Man nennt ρ die <u>kanonische Retraktion</u> von Δ auf Σ_0 mit Zentrum c_0.

Folgerung: In Homologie gilt: $\Sigma_0 \hookrightarrow \Delta \xrightarrow{\rho} \Sigma_0$

$H_*(\Sigma_0) \longrightarrow H_*(\Delta)$ ist <u>split injektiv</u>, das Bild ist direkter Summand.

Offensichtlich bildet ρ Galerien auf Galerien ab.

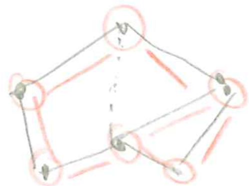
8. Def + Lemma Sei Δ ein Kammerkomplex mit Kammernmenge $\mathrm{Cham}(\Delta) = \{ c \in \Delta \mid c \text{ Kammer} \}$.
Wir versehen $\mathrm{Cham}(\Delta)$ mit der Galerienmetrik

$$d(c,c') = \min \{ m \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt eine Galerie } c = c_0, c_1, \dots, c_m = c' \}$$

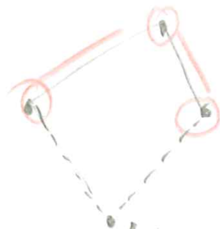
Offensichtlich sind reguläre simpliziale Abbildungen zwischen Kammersystemen 1-Lipschitz auf den Kammergraphen, $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_2$

$$d(\varphi(c), \varphi(c')) \leq d(c,c')$$

Ein Teilgraph eines Graphen heißt $\left\{ \begin{matrix} \text{stark konvex} \\ \text{konvex} \end{matrix} \right\}$, wenn er zu je zwei Ecken $\left\{ \begin{matrix} \text{einen} \\ \text{jeden} \end{matrix} \right\}$ kürzesten Weg enthält



nicht konvex



konvex, aber nicht stark konvex

9. Lemma Sei Δ Gebäude, $\Sigma_0 \in \mathcal{A}$, $c \in \mathrm{Cham}(\Sigma_0)$ und $\rho : \Delta \to \Sigma_0$ die kanonische Retraktion. Dann gilt

$$d(c, c_0) = d(\rho(c), c_0) \quad \text{für alle } c \in \mathrm{Cham}(\Delta)$$

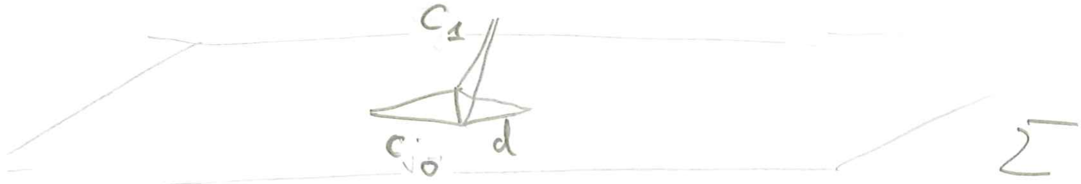
Bew: Wähle $\Sigma_1 \in \mathcal{A}$ mit $c, c_0 \in \Sigma_1$, kanon. Retraktion $\rho_1 : \Delta \to \Sigma_1$

$$\Sigma_1 \xrightarrow[\cong]{\rho} \Sigma_0 \xrightarrow[\cong]{\rho_1} \Sigma_1$$ eindeutiger Isom, also Identität

$$d(\rho_1 \rho(c), c_0) = d(c, c_0) \leq d(\rho(c), c_0) \leq d(c, c_0) \qquad \square$$

<u>Satz</u> Appartements in Gebäuden sind stark konvex: ist $\Sigma \subseteq \Delta$ Appartement, $c, c' \in \Sigma$ Kammern, so verläuft <u>jede</u> minimale Galerie von c nach c' in Δ innerhalb von Σ.

<u>Beweis</u> Sei $c = c_0, \ldots, c_m = c'$ minimale Galerie in Δ. Angenommen, die Galerie läuft nicht ganz in Σ. Dann gibt es ein kleinstes $j \geq 1$ mit $c_j \notin \Sigma$, aber $c_{j-1} \in \Sigma$. <u>OE $j=1$</u>



Betrachte $\rho : \Delta \to \Sigma$ mit Zentrum d, wobei $d \in \Sigma$ die eindeutige Kammer ist, die von c_0 und c_1 verschieden ist und im gleichen Panel ist.

Es folgt $\rho(c_1) = c_0$ $\rightsquigarrow$ Galerie

$$c_0, \rho(c_1) = c_0, \rho(c_2), \ldots, \rho(c_m) = c' \quad ↯ \quad \square$$

10. <u>Korollar</u> Wir definieren eine Abbildung

$$\delta : Cham(\Delta) \times Cham(\Delta) \longrightarrow W$$

("W-wertige Abstandsfunktion") wie folgt. Ist $c, d \in Cham(\Delta)$ wähle Apt. Σ mit $c, d \in \Sigma$ und wähle Isomorphism $\varphi : \Sigma \to \Sigma(W, I)$ über I

$\varphi(c), \varphi(d) \in W$ Kammern im Coxeterkomplex,

Setze $\delta(c,d) = \varphi(c)^{-1}\varphi(d) \in W$

Das ist wohldefiniert: Ist $\varphi' : \Sigma \to \Sigma(W, I)$ weiterer Isom über I, so gibt es $w \in W$ mit $\varphi'(e) = w\varphi(e)$ für alle $e \in Cham(\Sigma)$, weil W die Gruppe aller Autom. von $\Sigma(W, I)$ über I ist (ÜA 5.2!). Es folgt $\varphi'(c)^{-1}\varphi'(d)$ $= \varphi(c)^{-1}w^{-1}w\,\varphi(d) = \varphi(c)^{-1}\varphi(c)$.

Ist Σ' ein anderes Apt mit $c, d \in \Sigma'$, so gibt es genau ein Isom $\Sigma' \to \Sigma$, der c und d festhält (nach 5.2 und (G2)) und man erhält den gleichen Abstand δ. Beobachte: $d(c, c') = l_I(\delta(c, c'))$

<u>Interpretation der W-wertigen Abstandsfunktion.</u>

Ist $c = c_0, c_1, \ldots, c_m = c'$ eine minimale Galerie, so gibt es Elemente $i_1, \ldots, i_m \in I$ mit $t(c_{k-1} \cap c_k) = I \setminus \{i_k\}$. Man nennt $(i_1, \ldots, i_m) \in I^m$

den Typ der Galerie. Es gilt

$\delta(c,c') = i_1 \cdot i_2 \cdot \ldots \cdot i_m$, denn das ist im Coxeter-

komplex $\Sigma(W,I)$ richtig.

Im allgemeinen gibt es mehrere minimale Galerien von c nach c', aber beim Aufmultiplizieren ihrer Typen erhält man stets das gleiche Element $w \in W$.

<u>Eigenschaften der W-wertigen Abstandsfunktion</u>

Gegeben sei $\mathcal{C} = \mathrm{Cham}(\Delta)$ und $\delta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to W$

Es gilt (KS1) Für jedes $i \in I$ ist die Relation

$c \underset{i}{\sim} d :\Leftrightarrow \delta(c,d) \in \{1,i\} = \langle i \rangle$

eine Äquivalenzrelation, die mindestens 2 Elemente pro Klasse enthält

(KS2) Ist $\delta(c,d) = w = i_1 \cdots i_q$ und ist $(i_1, \ldots, i_q)$ reduziert, so gibt es eine Folge

$c = c_0 \underset{i_1}{\sim} c_1 \underset{i_2}{\sim} c_2 \underset{i_3}{\sim} \cdots \underset{i_q}{\sim} c_q$ in $\mathcal{C}$.

Man kann Gebäude auch ausgehend von diesen beiden Axiomen als <u>Kammersystem mit W-wertiger Abstandsfunktion</u> definieren. Das ist der Standpunkt in

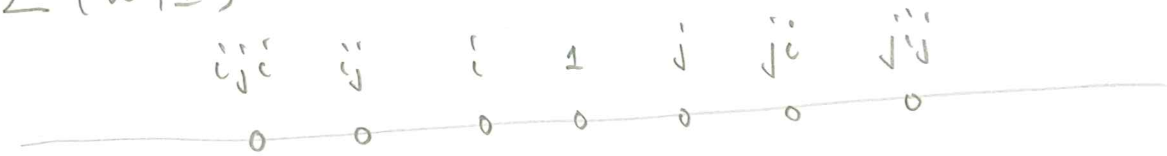
M. Ronan, Lectures on buildings

R. Weiss, The structure of spherical buildings.

11. Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$ $\circ \overset{\infty}{—} \circ$

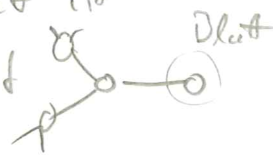
$W = \langle i, j \mid i^2 = j^2 = 1 \rangle$ unendliche Diedergruppe, vgl. §2.2, $W = \{i, j, ij, ji, iji, jij, \dots\}$

$\Sigma(W, I)$



Geometrische Realisierung ist reelle Gerade $\mathbb{R}$

<u>Satz</u> Die Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$ sind genau die Bäume ohne Blätter. [Ein Baum ist ein Graph, der keine Kreise enthält. Ein Blatt ist eine Ecke, die nur einen Nachbarn hat



]

<u>Beweis</u> Sei Δ Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$ $\rightsquigarrow$ Δ ist eindimensionaler Simplizialkomplex $\rightsquigarrow$ Graph und jede Ecke hat mind. 2 Nachbarn, weil das in Σ gilt. Wegen der Typfunktion ist Δ bipartit. Wenn es also einen Kreis in Δ gäbe, hätte er gerade Länge, etwa so

Aber dann gäbe es zwei minimale Galerien von c nach c' ↯ $\rightsquigarrow$ Δ ist bipartiter Graph ohne Kreise und ohne Blätter.

Ist umgekehrt Δ ein Baum ohne Blätter, so ist Δ bipartit (weil er keine Kreise ungerader Länge enthält). Definiere $\mathcal{A}$ als Menge aller in beide Richtungen unendlichen Wege in Δ. Der Schnitt zweier solcher Wege ist leer oder ein Intervall, damit sieht man (G1) leicht ein.

An diesem Beispiel sieht man auch, dass es im Allgemeinen mehrere Apartmentsysteme in Δ geben kann. Man kann aber zeigen, dass es immer ein maximales eindeutiges Apartmentsystem gibt (das aus allen zu $\Sigma(W,I)$ über I isomorphen Teilkomplexen besteht.).