§4 Gruppen mit Tits-Systemen

Wir beschäftigen uns jetzt mit Gruppen, die auf Gebäuden operieren. Zuerst einige allgemeine Beobachtungen.

1. Sei Δ ein Gebäude (vom Typ (W, I) mit Appartmentsyst. $\mathcal{A}$). Sei G eine Gruppe, die durch Automorphismen über I auf G wirkt (d.h. G operiert auf Δ und das Bild eines Simplex vom Typ $J \subseteq I$ hat wieder Typ J). Wir nehmen weiter an, dass G <u>transitiv</u> auf den Kammern wirkt (zu $a, b \in Cham(\Delta)$ gibt es stets $g \in G$ mit $g(a) = b$). Sei c_0 eine Kammer und $B = G_{c_0} = \{g \in G \mid g(c_0) = c_0\}$.
   Sei $P_i \supseteq B$ der Stabilisator der Seite $a \subseteq c_0$ vom Typ $I \setminus \{i\}$. Dann operiert P_i transitiv auf dem i-Panel $\{c \in Cham(\Delta) \mid c \supseteq a\}$ denn: $g(c_0) = c \supseteq a \Rightarrow g(a) = a$ weil $a \subseteq c$ eindeutig durch i bestimmt ist. Da die Panels mindestens 2 Elemente haben, gilt $P_i / B \cong \{c \in Cham(\Delta) \mid c \supseteq a\}$, insbesondere $[P_i : B] \geq 2$.

Ist allgemeiner $a \leq c_0$ mit $t(a) = I \setminus J$

so operiert G_a transitiv auf $\mathrm{lk}(a)$ und wir

setzen $P_J = G_a$, $P_\emptyset = B$, $P_I = G$

Beobachtung a) Es gilt $P_J = \langle P_j \mid j \in J \rangle$.

Beweis Sei $a \leq c_0$ die eindeutige Seite mit $t(a) = I \setminus J$.

Sei $c \in \Delta_{\geq a}$. Da $\mathrm{lk}(a)$ ein Gebäude ist, gibt es eine Galerie $c_0, c_1, \ldots, c_m = c$ in $\Delta_{\geq a}$.

Beh es gibt $g \in \langle P_j \mid j \in J \rangle$ mit $g(c_0) = c$.

Für $m = 0, 1$ ist das klar. Im allgemeinen finden wir ein $j \in J$ und $h \in P_j$ mit $h(c_0) = c_1$. Dann gibt es eine Galerie $h^{-1}(c_1) = c_0, h^{-1}(c_2), \ldots, h^{-1}(c_m)$ und mit Induktion ein $\tilde{g} \in \langle P_j \mid j \in J \rangle$ mit

$$\underbrace{\tilde{g} h^{-1}(c_1)}_{=\tilde{g}(c_0)} = h^{-1}(c_m) \rightsquigarrow h\tilde{g}(c_0) = c_m$$

Beh $\square$

Folglich ist $\langle P_j \mid j \in J \rangle$ transitiv auf $\Delta_{\geq a}$.

Da $B \leq P_j$, folgt $P_J = \langle P_j \mid j \in J \rangle B = \langle P_j \mid j \in J \rangle$ $\square$

Beobachtung b) Wir können Δ rekonstruieren aus G und den Daten $\{P_j \mid j \in I\}$. Setze nämlich

$B = \bigcap \{P_j \mid j \in I\}$, $P_J = \langle j \in J \mid P_j \rangle$

Identifiziere Simplices e vom Typ K mit den Nebenklassen $gP_{I\setminus K}$, genauer:

$e = g(a)$, $a \subseteq c$, $t(a) = K$ entspricht $gP_{I\setminus K}$

Insbesondere entsprechen die Kammern den Nebenklassen G/B und die Vertizes den Nebenklassen $G/P_{I\setminus\{i\}}$

2. <u>Definition</u> Sei Δ ein Gebäude vom Typ (W,I) mit Appartmentsystem $\mathcal{A}$. Sei G eine Gruppe, die auf Δ operiert, d.h. G operiert durch simpliziale typerhaltende Automorphismen auf Δ und $g(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ gilt für alle $g \in G$. Schreibe kurz $G \to \mathrm{Aut}(\Delta, \mathcal{A})$.

Wir nennen solch eine Wirkung <u>stark transitiv</u>, wenn Folgendes gilt:

(ST1) G operiert transitiv auf $\mathrm{Cham}(\Delta)$

(ST2) G operiert transitiv auf $\mathcal{A}$

(ST3) Ist $\Sigma \in \mathcal{A}$, so operiert $N_G(\Sigma) = \{g \in G \mid g(\Sigma) = \Sigma\}$ transitiv auf $\mathrm{Cham}(\Sigma)$.

<u>Bem</u> (ST1) ist redundant, folgt aus (ST2)+(ST3).

Unser nächstes Ziel ist es, diese Situation rein gruppentheoretisch zu beschreiben. Dazu brauchen wir <u>Doppelnebenklassen</u>.

3. <u>Doppelnebenklassen</u>. Sei G eine Gruppe mit Untergruppen $H, K \leq G$. Eine Menge der Form

$$HgK = \{hgk \mid h \in H, k \in K\} \subseteq G$$

heißt <u>Doppelnebenklasse</u>. Schreibe $H\backslash G/K = \{HgK \mid g \in G\}$.

<u>Interpretation:</u> H operiert (von links) auf G/K durch $h: gK \mapsto hgK$. Die Doppelnebenklassen entsprechen genau den Bahnen dieser Wirkung:

$$\left[\begin{array}{l} gK, g'K \text{ in gleicher } H\text{-Bahn} \Leftrightarrow \exists h \in H \; g'K = hgK \\ \Leftrightarrow g'K \in HgK \Leftrightarrow Hg'K = HgK \end{array}\right]$$

Insbesondere (gilt wie bei Nebenklassen): Doppelnebenklassen sind entweder gleich oder disjunkt,

$$HgK \cap Hg'K \neq \emptyset \Leftrightarrow HgK = Hg'K.$$

Aber: nicht alle Doppelnebenklassen müssen gleichmächtig sein (!)

Beachte auch: H wirkt transitiv auf $G/K \Leftrightarrow$
$$HK = G$$

4. <u>Satz</u> Sei $(\Delta, \mathcal{A})$ dickes Gebäude vom Typ (W, I). Wähle $\Sigma_0 \in \mathcal{A}$ und sei $c_0 \in \mathrm{Cham}(\Sigma_0)$.

Wir setzen $B := G_{c_0} = \{ g \in G \mid g(c_0) = c_0 \}$

$$N := N_G(\Sigma_0) = \{ g \in G \mid g(\Sigma_0) = \Sigma_0 \}$$

$$T := Z_G(\Sigma_0) = \{ g \in G \mid g(c) = c \text{ für alle } c \in \Sigma \}$$

Offensichtlich gilt $T \trianglelefteq N$ (Normalteiler), denn T ist genau der Kern der Wirkung von N auf Σ_0. Nach Voraussetzung operiert N transitiv auf $\mathrm{Cham}(\Sigma_0)$, nach (ÜA 5.2) gilt also $N/T \cong W$. Seien c_i, $i \in I$ die Nachbarn von c_0 <u>in Σ_0</u> mit $\delta(c_0, c_i) = i$ (das ist eindeutig). Wir wählen Elemente $s_i \in N$ mit $s_i(c_0) = c_i$, $i \in I$. Unter dem Isomorphismus $N/T \to W$ bildet $s_i T$ genau auf $i \in I$ ab. Sei $S = \{ s_i \mid i \in I \}$. Beachte auch: $T = B \cap N$ (wegen ÜA 5.2!)

Das Datum (G, B, N, S) hat folgende Eigenschaften.

(a) $G = BNB$

insbesondere $G = \langle B \cup N \rangle$

(b) $B \cap N = T$ ist Normalteiler in N

(c) Der Quotient N/T wird von den sT, $s \in S$ erzeugt und sT ist Involution

(d) Für alle $n \in N$ und $s \in S$ gilt

$BnBsB \subseteq BnB \cup BnsB$

(e) Für alle $s \in S$ ist $sBs^{-1} \neq B$

Nachweis der Eigenschaften (a)–(e)

(a) Sei $g \in G$ und $c = g(c_0)$. Sei $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $c_0, c \in \Sigma$. Es gibt $h_1 \in G$ mit $h_1(\Sigma) = \Sigma_0$ sowie $h_2 \in N$ mit $h_2 h_1(c_0) = c_0$ $\leadsto$ $h_2 h_1 = b \in B$ $b(\Sigma) = \Sigma_0$. Wähle $n \in N$ mit $n(c_0) = b(c)$

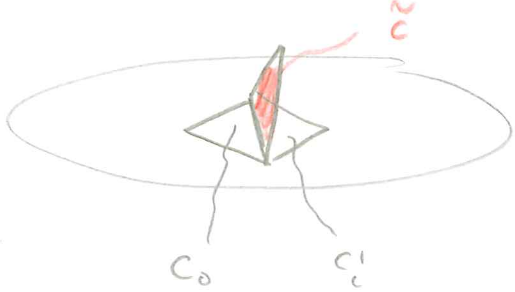
$\Rightarrow b^{-1} n(c_0) = g(c_0) \Rightarrow n^{-1} b g \in B \Rightarrow g \in b^{-1} n B$ □

(b) gilt wegen ÜA 5.2: $B \cap N$ ist genau der Kern der N-Wirkung auf Σ_0 □

(c) Wähle Isom $\Sigma_0 \xrightarrow{\varphi} \Sigma(W, I)$ mit $\varphi(c_0) = 1$

$s_i \in S$ entspricht genau $i \in I \subseteq W$, $N/T \cong W$. □

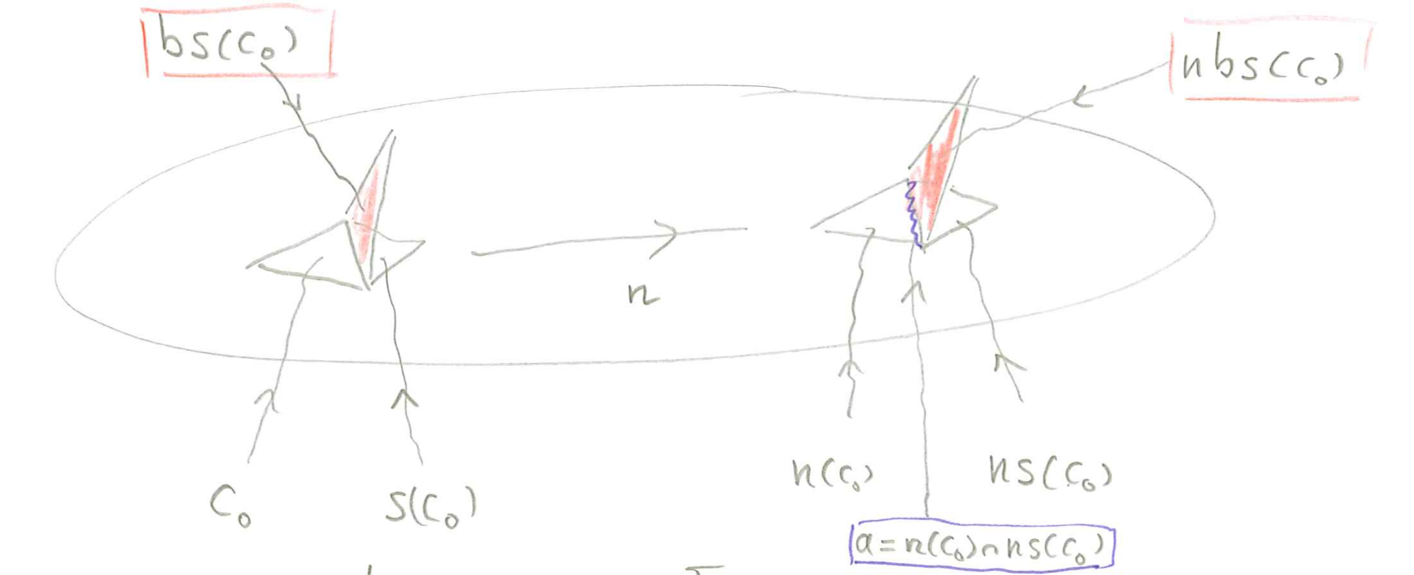
(e) Da Δ dick ist, gibt es Kammer $\tilde{c} \neq c_0, c_i$ mit $\tilde{c} \cap c_0 = c_i \cap c_0$



also gibt es $b \in B$ mit $b(c_i) = \tilde{c} \neq c_i = s_i(c_0)$

d.h. $s_i^{-1} b s_i \notin B \rightsquigarrow b \notin s_i B s_i^{-1}$ $\square$

(d) Sei $n \in N$, $b \in B$, $s \in S$, zeige $nbs \in BnB \cup BnsB$.



Wähle $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $c_0 \in \Sigma$ und $a \in \Sigma$, wobei $a = n(c_0) \cap ns(c_0)$. Wähle $g \in G$ mit $g(\Sigma) = \Sigma_0$ und $g(c_0) = c_0$, das geht wegen (ST2)+(ST3). Wegen (ÜA 5.2) gilt $g(a) = a$, denn $\Sigma \xrightarrow{g} \Sigma_0$ ist Isomorphismus, der c_0 festlässt. Es folgt

$gnbs(c_0) \in \{n(c_0), ns(c_0)\}$, also

$nbs \in BnB \cup BnsB$. $\square$

Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, dass man mit (a) – (e) immer ein Gebäude erhält.

5. **Def** Sei G eine Gruppe, $B, N \leq G$ Untergruppen und $S \subseteq N$ eine Teilmenge. Wir nennen (G, B, N, S) ein Tits-System oder BN-Paar, wenn Folgendes gilt

(BN1) $G = \langle B \cup N \rangle$ und $T := B \cap N \trianglelefteq N$ ist normal in N. Setze $W := N/T$

(BN2) Die Elemente $\{sT \in W \mid s \in S\}$ erzeugen W und sind Involutionen,
$W = \langle sT \mid s \in S \rangle$ $\quad sTsT = T \neq sT$

(BN3) Für alle $s \in S$ und $n \in N$ gilt
$BnBsB \subseteq BnB \cup BnsB$

(BN4) Für alle $s \in S$ ist $sBs^{-1} \neq B$.

Der Name Tits-System kommt aus Bourbaki (nach Jacques Tits), der Name BN-Paar von B - Borelgruppe und N - Normalisator - oder von BN = Bonn. Die Gruppe W heißt Weyl-Gruppe des Tits-Systems.

Nach §4.4. hat jede stark transitive Gruppe ein Tits-System.

6. Elementare Eigenschaften von Tib-Systemen

Sei (G, B, N, S) ein Tib-System. Für $w \in W$ sei $C(w) = BwB$ (das ist wohldefiniert, weil $w = nT$ mit $n \in N$ und $T \subseteq B$).

Offensichtlich gilt $C(1) = B$ und $C(w^{-1}) = C(w)^{-1}$, sowie $C(w_1 w_2) \subseteq C(w_1) C(w_2)$

Axiom (BN3) lautet damit:

$$C(n)C(s) \subseteq C(u) \cup C(us)$$

Das Produkt $C(u)C(s) = \bigcup \{ BubsB \mid b \in B \}$ ist nach §4.3 eine disjunkte Vereinigung von Doppelnebenklassen. Ausserdem gilt $C(us) \subseteq C(u)C(s)$.

Damit lässt sich (BN3) verfeinern:

$$C(u)C(s) = \begin{cases} C(u) \cup C(us) & \text{gdw } C(u) \subseteq C(u)C(s) \\ C(us) & \text{gdw } C(u) \not\subseteq C(u)C(s) \end{cases}$$

Nach (BN4) gilt $C(s)C(s) \neq B = C(1)$, also folgt $C(s)C(s) = C(1) \cup C(s)$. Insbesondere ist also $C(s)C(s) = B \cup BsB =: P_s$ eine Untergruppe von G.

Als nächstes bemerken wir, dass gilt

$$\underbrace{C(u)C(s)C(s)}_{=(C(1)\cup C(s))} = \underbrace{C(u)C(1)}_{=C(u)} \cup C(u)C(s) .$$

#

7. Lemma Sei (G,B,N,S) ein Tits-System und sei $w\in W$, $s_1,\dots,s_q\in S$. Dann gilt

$$C(w)C(s_1s_2\cdots s_q)\subseteq \bigcup\{C(ws_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_p}) \mid i_1<i_2<i_3<\dots\le q\}$$

Beweis mit Induktion nach q. $q=0$ ist klar, $q=1$ ist (BN3). Im Allgemeinen haben wir

$$C(w)C(s_1\cdots s_{q+1})\subseteq C(w)C(s_1\cdots s_q)\,C(s_{q+1})$$

$$\subseteq \bigcup\{C(ws_{i_1}\cdots s_{i_p})C(s_{q+1}) \mid i_1<i_2<\dots\le q\}$$

$$\overset{(BN3)}{\subseteq} \bigcup\{C(ws_{i_1}\cdots s_{i_p}) \mid i_1<i_2<\dots\le q+1\}. \qquad \square$$

8. Theorem (Die Bruhat-Zerlegung) Sei (G,B,N,S) ein Tits-System. Dann gilt $G=BNB$ und die Abbildung $W\longrightarrow {}_B\backslash G/_B$, $w\longmapsto C(w)=BwB$ ist eine Bijektion, die Bruhat-Zerlegung von G.

Beweis Sei $X=\bigcup\{C(w)\mid w\in W\}\subseteq G$. Wegen $C(w)^{-1}=C(w^{-1})$ ist $X^{-1}=X$. Nach Lemma 7 gilt $C(u)C(v)\subseteq X$ für alle $u,v\in W$. Es folgt $X=G$, da $B,N\subseteq X$.

Bleibt zu zeigen: aus $v,w \in W$, $v \neq w$ folgt $C(v) \neq C(w)$. Offensichtlich folgt das aus:

<u>Behauptung</u>: Ist $v,w \in W$, $v \neq w$ und $\ell_S(w) \geq \ell_S(v) = q$, so ist $C(w) \neq C(v)$.

Beweis der Behauptung mit Induktion nach q.

$q = 0 \Rightarrow v = 1 \in W$, $w \neq 1 \Rightarrow w \notin B \Rightarrow C(w) \neq B = C(1)$

<u>Induktionsschritt</u> $q \to q+1$ Sei $\ell_S(w) \geq \ell_S(v) = q+1$.

Wähle $s \in S$ so, dass $\ell_S(vs) = q \Rightarrow w \neq vs \neq ws$.

$\ell_S(ws) \geq \ell_S(w) - 1 \geq \ell_S(vs) = q \underset{\text{Induktion}}{\Rightarrow} C(w) \neq C(vs) \neq C(ws)$

damit $C(vs) \cap \underbrace{C(w)C(s)}_{\subseteq C(w) \cup C(ws)} = \emptyset$. Da $C(vs) \subseteq C(v)C(s)$

folgt $C(v) \neq C(w)$ $\square$

$\square$

<u>Bemerkung</u> Wenn das Tits-System (G, B, N, S) von einer stark transitiven Wirkung auf ein Gebäude Δ kommt, so entsprechen die B-Bahnen auf $\mathrm{Cham}(\Delta)$ genau den Doppelnebenklassen in der Bruhat-Zerlegung. Also ist $\mathrm{Cham}(\Sigma_0)$ genau ein Repräsentantensystem der B-Bahnen in $\mathrm{Cham}(\Delta)$.

9. **Lemma** Sei (G, B, N, S) ein Tits-System.
Sei $w \in W$, $s \in S$. Gilt $l_S(ws) \geq l_S(w)$, so folgt
$C(w)C(s) = C(ws)$.

Beweis mit Induktion nach $q = l_S(w)$.

$\boxed{q=0}$ $\leadsto w = 1$ $\quad C(1)C(s) = C(s)$ $\quad (\checkmark)$

$\boxed{q=1}$ $\leadsto w = s' \in S$ $\quad C(s')C(s) \subseteq C(ss') \cup C(s)$

$$\subseteq C(ss') \cup C(s') \quad \text{(genauso)}$$

Wegen $l_S(ss') \geq l_S(s') = 1$ ist $ss' \neq 1$ in W,
also $s \neq s'$, also $C(s) \neq C(s') \Rightarrow C(s's) = C(s')C(s)$.

$\boxed{q \geq 2}$ $\quad w = s'v \quad$ mit $l_S(v) = q$, $l_S(w) = q+1$

Induktionsannahme invertiert liefert

$$C(s')C(v) = C(s'v) \quad \text{und}$$
$$C(w)C(s) = C(s'v)C(s) = C(s')C(v)C(s)$$

Wegen $l_S(ws) \geq q+1$ gilt $l_S(vs) \geq q$,

also $C(s')\underbrace{C(v)C(s)} = C(s')C(vs) \subseteq C(s'vs) \cup C(vs)$

$$= C(ws) \cup C(vs)$$

d.h. $C(w)C(s) \subseteq C(ws) \cup C(vs)$

Andererseits gilt $C(w)C(s) \subseteq C(ws) \cup C(w)$ (BN3)

aber $C(w) \neq C(vs)$ wegen $l_S(ws) \neq l_S(v)$.

Folglich $C(w)C(s) = C(ws)$. $\square$

10. Satz Sei (G, B, N, S) ein Tits-System, $W = N/T$ seine Weylgruppe. Dann ist (W, S) ein Coxetersystem.

Beweis Wir zeigen, dass (E) gilt und wenden Matsumotos Satz §2.12 an.

Sei $w \in W$, $s \in S$ mit $l_S(w) = q$ und $l_S(sw) \leq q$.

Da $l_S(s(sw)) = l_S(w) \geq l(sw)$, nach Lemma 9 folgt

$$C(s)C(sw) = C(w), \text{ also}$$

$$C(s)C(w) = C(s)C(s)C(sw) \underset{\S 4.6}{=} \left(C(1) \cup C(s)\right) C(sw)$$

$$= C(sw) \cup C(w)$$

Schreibe $w = s_1 \cdots s_q$ mit $s_j \in S$.

Da $C(s)C(w) \cap C(w) \neq \emptyset$ folgt:

$$sBw \cap BwB \neq \emptyset$$

$$sB \cap BwBw^{-1} \neq \emptyset$$

$$BsB \cap \underbrace{BwBw^{-1}B}_{\text{Vereinigung von DNK!}} \neq \emptyset$$

also $BsB \subseteq BwBw^{-1}B = C(w)C(w^{-1})$

d.h. $C(s) \subseteq \bigcup \{ C(ws_{i_p} s_{i_{p-1}} \cdots s_{i_1}) \mid i_1 < i_2 < \ldots \leq q \}$

Es gibt also $i_1 < i_2 < \ldots \leq q$ so, dass

$$C(s) = C(ws_{i_p} s_{i_{p-1}} \cdots s_{i_1})$$

$$\Rightarrow w = s\, s_{i_1} \cdots s_{i_p}$$

Da $s \neq 1$ in W gilt, ist $w \neq s_{i_1} \cdots s_{i_p}$, also $p < q$. Da $l_S(w) = q$ ist $p = q-1$ und wir haben (E) gezeigt. # $\square$

11. Satz Sei (G, B, N, S) ein Tits-System. Für $R \subseteq S$ sei $W_R = \langle rT \mid r \in R \rangle \subseteq W$ sowie

$$P_R = \bigcup \{ C(w) \mid w \in W_R \}$$

(Dann ist (W_R, R) ein Coxetersystem.)
Dann ist P_R eine Untergruppe. Die Abbildung $R \longmapsto P_R$ ist injektiv und $R \subseteq R'$ gilt genau dann, wenn $P_R \subseteq P_{R'}$.

Beweis Nach Lemma §4.7 gilt $P_R P_R \subseteq P_R$, und $P_R^{-1} = P_R$ nach Definition. Also ist $P_R \subseteq G$ Untergruppe. Nach §4.8 gilt

$$P_R \subseteq P_{R'} \Leftrightarrow W_R \subseteq W_{R'} \underset{\S 2.12}{\Longleftrightarrow} R \subseteq R' \qquad \square$$

Korollar Ist $R \subseteq S$, so ist (P_R, B, N_R, R) ein Titssystem, wobei N_R das Urbild von W_R in N ist.

Die Untergruppen $P_R \subseteq G$ heißen Standard-parabolische Untergruppen.

<u>Beweis</u> $P_R = BN_RB$ und $B \cap N_R = (B\cap N)\cap N_R \trianglelefteq N_R$

damit ist (BN1) gezeigt.

(BN2) ist klar: $W_R = \langle rT \mid r \in R\rangle$

(BN3) ist klar: $BuBsB \subseteq BusB \cup BuB$

(BN4) ist auch klar. $\square$

<u>12. Lemma</u> Sei (G, B, N, S) Tits-System.

Für $R, R' \subseteq S$ und $w \in W$ gilt dann

$$P_R w P_{R'} = BW_R w W_{R'} B$$

<u>Beweis</u> Sei $s_1, \dots, s_p \in R$

$s'_1, \dots, s'_q \in R'$

$$C(s_1 \cdots s_p)C(w)C(s'_1 \cdots s'_q)$$

$\subseteq BW_R w W_{R'}B \leadsto P_R w P_{R'} \subseteq BW_R w W_{R'} B \subseteq P_R w P_{R'}$

↑ §4.7 $\square$

<u>Korollar</u> Wir haben eine Bijektion

$$W_R \backslash W / W_{R'} \xrightarrow{\varphi} P_R \backslash G / P_{R'}$$

$$W_R w W_{R'} \longmapsto P_R w P_{R'}$$

Beweis Betrachte das kommutative Diagramm,

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\text{bij}", "\text{(Bruhat-Zerl.)}"'] \arrow[d, "\text{surjektiv}"'] & B\backslash G/B \arrow[d, "\text{surjektiv}"] \\ W_R\backslash W/W_{R'} \arrow[r, "\varphi"] & P_R\backslash G/P_{R'} \end{tikzcd}$$

Es folgt, dass φ surjektiv ist.

Angenommen, $P_R w P_{R'} = P_R v P_{R'}$

$\underset{\text{Lemma}}{\Longleftrightarrow}$ $BW_R w W_{R'} B = BW_R v W_{R'} B$

$\underset{\text{Bruhat Zerlegung}}{\Longleftrightarrow}$ $W_R w W_{R'} = W_R v W_{R'}$ $\square$

13. Sei (G, B, N, S) ein Tits-System.

Sei $\Delta = \Delta(G, B, N, S) = \bigcup \{ G/P_R \mid R \subseteq S \}$

mit partieller Ordnung $gP_R \leq g'P_{R'} \overset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow} gP_R \supseteq g'P_{R'}$

Nach §4.11 ist Δ Simplizialkomplex über S

mit $t(gP_R) := S \setminus R$. Sei $\Sigma(W, S)$ der

zum Coxetersystem (W, S) gehörige Coxeterkomplex.

Wir definieren $\varphi : \Sigma(W,S) \to \Delta$ durch
$wW_R \longmapsto wP_R$, das ist eine simpliziale Abbildung über S. Weiter gilt:

$$vP_R = wP_R \Leftrightarrow v^{-1}w \in P_R \Leftrightarrow v^{-1}w \in W_R$$

$\Leftrightarrow vW_R = wW_R$, also ist φ eine Einbettung eines Unterkomplexes. Sei $\Sigma_0 = \varphi(\Sigma(W,S))$.

Sei $\mathcal{A} = \{ g(\Sigma_0) \mid g \in G \}$

14. <u>Theorem</u> Sei (G,B,N,S) ein Tits-System, sei $\Delta = \Delta(G,B,N,S)$ und $\mathcal{A}$ definiert wie in §4.13. Dann ist Δ ein (dickes) Gebäude vom Typ (W,S) mit Appartementsystem $\mathcal{A}$, auf dem G stark transitiv operiert.

<u>Beweis</u> Jedes $\Sigma \in \mathcal{A}$ ist nach Konstruktion isomorph zu $\Sigma(W,S)$, also gilt (G1).

Zeige (G3). Ist $g \in G$, $g = bnb'$ mit $n \in N$, $b, b' \in B$, so folgt $gP_R = bnb'P_R = bnP_R$.
Also liegen $P_{R'}$ und gP_R beide im Appt. $b(\Sigma_0)$, damit liegen $hP_{R'}$ und hgP_R im Appt $hb(\Sigma_0)$.

Zeige (G2) für $a = P_{R'}$ und $b = nP_R$
und Appts $\Sigma_0, \Sigma \in \mathcal{A}$, $\Sigma = g(\Sigma_0)$

$P_{R'} \in \Sigma = g(\Sigma_0) \rightsquigarrow P_{R'} = g m P_{R'}$ mit $m \in N$

$\rightsquigarrow gm \in P_{R'}$ $\quad gm(\Sigma_0) = g(\Sigma_0) \Rightarrow$ Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass $g \in P_{R'}$ gilt.

$nP_R \in g(\Sigma_0) \rightsquigarrow nP_R = g\tilde{n} P_R$ mit $\tilde{n} \in N$

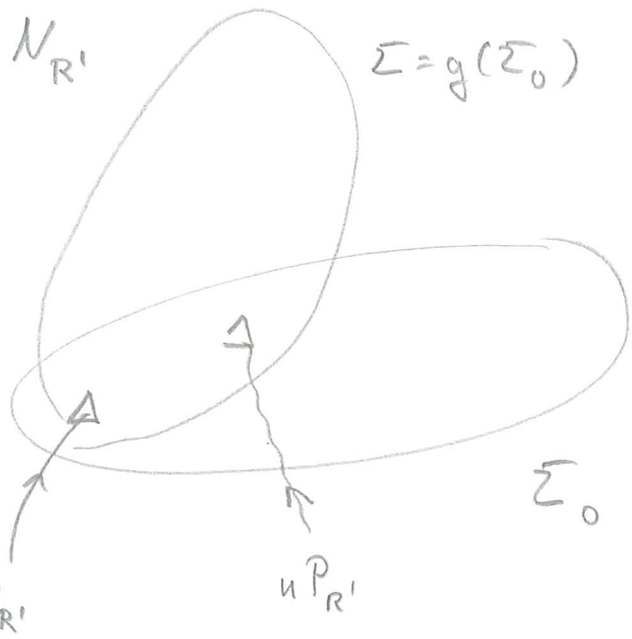
$\rightsquigarrow nP_R \subseteq P_{R'}\tilde{n} P_R \overset{§4.12}{\rightsquigarrow} n \in W_{R'}\tilde{n} W_R$

$\rightsquigarrow n \in w_1 \tilde{n} W_R$ für $w_1 \in W_{R'}$

$\rightsquigarrow n \in n_1\tilde{n} W_R$ für $n_1 \in N_{R'}$

$\rightsquigarrow n_1^{-1} n \in \tilde{n} P_R$

$\rightsquigarrow g\tilde{n} P_R = g n_1^{-1} n P_R$



Betrachte $gn_1^{-1} \in G$

$(gn_1^{-1})(\Sigma_0) = \Sigma$

$gn_1^{-1}P_{R'} = gP_{R'} = P_{R'}$

$gn_1^{-1}nP_R = g\tilde{n} P_R = nP_R$, d.h. gn_1^{-1} ist der für (G2) gesuchte Isomorphismus, der Σ_0 auf Σ abbildet und der $a = P_{R'}$ sowie

$b = nP_R$ fest lässt.

Da sich jedes andere Appartment mit G nach Σ_0 verschieben läßt, folgt Axiom (G2).

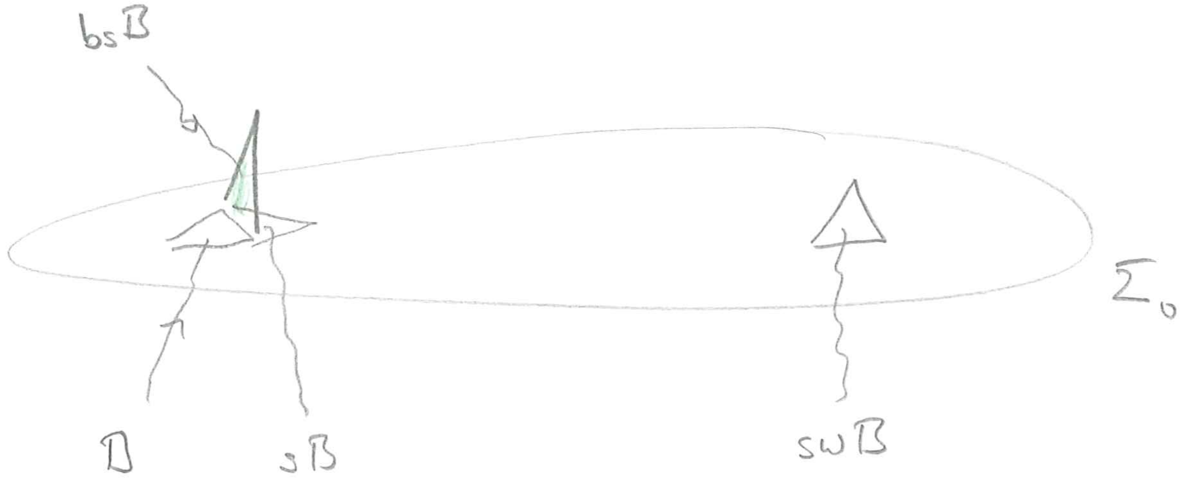
15. <u>Satz</u> Sei (G, B, N, S) ein Tits-System. Ist $H \leq G$ Untergruppe mit $B \subseteq H$, so gibt es $R \subseteq S$ mit $H = P_R$, d.h. die Obergruppen von B sind genau die Standard-parabolischen Untergruppen von G (von denen es genau $2^{\# S}$ viele gibt).

<u>Beweis</u> Sei $R = S \cap H$. Dann gilt jedenfalls $P_R \subseteq H$. Wegen $B \subseteq H$ ist H Vereinigung von B-Doppelnebenklassen, $H = \bigcup \{ BhB \mid h \in H \}$. Jede dieser DNK ist wegen der Bruhatzerlegung von der Form $BhB = C(w)$ für ein $w \in W$.

<u>Beh</u>: $C(w) \subseteq H \Rightarrow w \in W_R$.

<u>Bew</u>: Induktion nach $q = l_S(w)$. $q = 0,1$ ist klar.

Angenommen, $\ell(sw) = \ell(w)+1 = q+1$ für $w \in W$, $s \in S$ und $C(sw) \subseteq H$. Betrachte das Gebäude $\Delta(G, B, N, S)$. Wähle $b \in B$ so, dass $bsB \neq sB$



Die Retraktion $\rho: \Delta \to \Sigma_0$ mit Zentrum sB bildet bsB auf B ab, also gilt $d(bsB, swB) \geq d(B, swB) = q+1$

Insbesondere ist $Bs^{-1}b^{-1}swB \neq BwB$, also

$Bs^{-1}b^{-1}swB = BswB$ und damit gibt es $g \in G$

mit ① $g(swB) = swB \rightsquigarrow g \in swB(sw)^{-1} \subseteq H$

② $g(bsB) = B \rightsquigarrow s \in H \rightsquigarrow s \in R$

also $C(s) \subseteq H$. Nach Lemma 9 gilt $C(sw) = C(s)C(w)$, es folgt $C(w) \subseteq H$, nach Induktionsannahme gilt

$w \in W_R \rightsquigarrow sw \in W_R$ $\square$

<u>Korollar</u> Es gilt

$$\{ sT \mid s \in S \} = \{ w \in W \mid w \neq 1 \text{ und } B \cup BwB \text{ ist Gruppe} \}$$

<u>Beweis</u> $s \in S \leadsto B \cup BsB$ ist Gruppe, vgl. §4.6.

Ist umgekehrt $H = B \cup BwB$ eine Gruppe, so folgt

$H = P_R = BW_RB \leadsto w = 1$ oder $w = sT$. $\square$

16. <u>Satz</u> Sei (G, B, N, S) ein Tits-System, sei $M \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Dann gibt es $R \subseteq S$ mit $BM = P_R$ und für alle $r \in R$, $s \in S \setminus R$ gilt $[r,s] = 1 \pmod T$.

<u>Beweis</u> Da M Normalteiler ist, ist $BM \leq G$ eine Untergruppe (üA!), also $BM = P_R$ für ein $R \subseteq S$ nach §4.15. Sei $r \in R$, $s \in S \setminus R$.

Wegen $C(r) \subseteq BM$ und $C(r) \not\subseteq B$ gilt $C(r) \cap M \neq \emptyset$. Weiter gilt $sC(r)s^{-1} \cap M \neq \emptyset$

$\Rightarrow C(s)C(r)C(s^{-1}) \cap M \neq \emptyset$. Wegen $l_S(rs) = 2$ gilt $C(s)C(r) = C(rs)$ nach §4.9.

Angenommen, $l_S(srs) = 3 \leadsto C(sr)C(s) \underset{\uparrow §4.9}{=} C(srs)$

$\Rightarrow M \cap C(srs) \neq \emptyset \leadsto C(srs) \subseteq BM$ ↯ wegen $s \in S \setminus R$

Also ist $l_S(srs) = 1$, d.h. $srs = r \pmod T$ $\square$

Korollar Sei (G, B, N, S) Tits-System, sei (W, S) irreduzibel, sei G perfekt $(DG = G)$ und sei B auflösbar.
Dann ist jeder Normalteiler $M \trianglelefteq G$ entweder in B enthalten oder $M = G$.

Beweis Angenommen, $M \trianglelefteq G$ und $M \not\subseteq B$.
Es folgt $MB = P_R \neq B$ und wegen der Irreduzibilität von (W,S) gilt $P_R = P_S = G$, also $MB = G$.

Weiter ist $G/M = BM/M \cong B/M \cap B$ als Quotient der auflösbaren Gruppe G auflösbar. Wegen $DG = G$ ist $D(G/M) = G/M$, also $G/M = 1$. $\square$

Korollar Ist (G, B, N, S) Tits-Syst., (W,S) irreduzibel, G perfekt, B auflösbar und ist

$$M = \bigcap \{ g B g^{-1} \mid g \in G \}$$

so ist G/M einfach.

Beweis Klar: $M \trianglelefteq G$ und $M \subseteq B$. Ist $U \trianglelefteq G$, $U \neq G$, so ist $U \subseteq B$ und nach Konstruktion $U \subseteq M$, d.h. M ist der größte Normalteiler von G. Folglich ist G/M einfach. $\square$

<u>Korollar</u> Angenommen $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ ist perfekt und wirkt 2-fach transitiv auf X (d.h. zu allen $x \neq y$, $x' \neq y'$ in X gibt es ein $g \in G$ mit $g(x) = x'$, $g(y) = y'$) und ist der Punktstabilisator G_x auflösbar, so ist G einfach. $\square$