

1. Hausaufgabenblatt zur Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie

(Abgabe: bis Donnerstag 16.04.2015, 14:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 1.1

Geben Sie ein Beispiel einer bijektiven stetigen Abbildung, die keine stetige Inverse hat.

Aufgabe 1.2

Sei X eine Menge und \mathcal{C} eine nichtleere Menge von Teilmengen von X . Zeigen Sie:

- (i) $X - \bigcap \mathcal{C} = \bigcup \{X - C \mid C \in \mathcal{C}\}$
- (ii) $X - \bigcup \mathcal{C} = \bigcap \{X - C \mid C \in \mathcal{C}\}$

Aufgabe 1.3

Sei X ein metrischer Raum. Beweisen oder widerlegen Sie:

- (i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- (ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- (iii) $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$
- (iv) $\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$

Aufgabe 1.4

Definition: Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Ein Punkt $p \in X$ heißt **Häufungspunkt von A** , wenn für jede Umgebung N von p ein Punkt $a \in N \cap A$ existiert mit $a \neq p$.

- (i) Zeigen Sie:

$$\overline{A} = A \cup \{p \in X \mid p \text{ Häufungspunkt von } A\}$$

- (ii) Bestimmen Sie die Häufungspunkte von $A \subseteq \mathbb{R}$ für

- $A = \mathbb{Z}$
- $A = \mathbb{Q}$
- $A = [0, 1)$
- $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$

*-Aufgabe (Abgabe bis 23.04.2015)

Betrachten Sie auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ eines metrischen Raumes X folgende Operationen:

$$\begin{aligned} \alpha, \beta : \mathcal{P}(X) &\rightarrow \mathcal{P}(X) \\ \alpha : A &\mapsto \overline{A} \\ \beta : A &\mapsto X - A \end{aligned}$$

- (i) Zeigen Sie, dass man ausgehend von einer beliebigen Menge $A \subseteq X$ mit iterierten Anwenden der Operationen α, β höchstens 14 verschiedene Mengen in X erhält.

-bitte wenden-

(ii) Geben Sie ein Beispiel $A \subseteq \mathbb{R}$, wo die 14 Mengen realisiert werden.

Organisatorisches

Sie dürfen in Zweier-Gruppen abgeben, wenn beide Mitglieder zur gleichen Übungsgruppe gehören. Grundsätzlich gilt: wer seinen Namen auf ein Aufgabenblatt schreibt, muss in der Lage sein, alle Aufgaben auf diesem Blatt vorzurechnen.

Die Nummer des Zettelkastens zur Abgabe Ihrer Hausaufgaben, die Aufgabenblätter, das Vorlesungsskript sowie aktuelle Informationen zur Veranstaltung finden Sie auf der Webseite.