Prof. Dr. L. Kramer
Dr. O. Varghese

SS 15

2. Hausaufgabenblatt zur Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie

(**Abgabe:** bis Freitag 24.04.2015, 14:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 2.1

(i) Gegeben sei $X = \mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik. Zeigen Sie, dass folgende Gleichheiten in X gelten:
   (a) $\mathrm{Cl}((0,1)) = [0,1]$
   (b) $\mathrm{Int}([0,1]) = (0,1)$
   (c) $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
   (d) $\mathrm{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$

(ii) Gegeben sei ein metrischer Raum X und eine Teilmenge $Y \subseteq X$. Zeigen Sie:
   (a) Die Teilmenge $A \subseteq Y$ ist genau dann abgeschlossen in Y, wenn eine abgeschlossene Teilmenge B in X existiert mit: $A = B \cap Y$.
   (b) Wenn $A \subseteq Y$ abgeschlossen in Y und Y abgeschlossen in X ist, dann ist A abgeschlossen in X.

Aufgabe 2.2

Gegeben seien metrische Räume X, Y und eine Abbildung $\varphi : X \to Y$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) φ ist stetig

(ii) Für jede Teilmenge $Z \subseteq X$ gilt: $\varphi(\overline{Z}) \subseteq \overline{\varphi(Z)}$

Aufgabe 2.3

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Setze

$$\begin{aligned} \overline{d} : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (p,q) &\mapsto \min\{1, d(p,q)\} \end{aligned}$$

für $p, q \in X$. Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung $\overline{d}$ ist eine Metrik.

(ii) $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen bezüglich d, wenn A abgeschlossen ist bezüglich $\overline{d}$.

(iii) Ist Z ein metrischer Raum und $\varphi : Z \to X$ (bzw. $\psi : X \to Z$) Abbildungen, so sind φ (bzw. ψ) stetig bzgl. d genau dann, wenn φ (bzw. ψ) stetig bzgl. $\overline{d}$ sind.

(iv) (X, d) ist vollständig genau dann, wenn $(X, \overline{d})$ vollständig ist.

Aufgabe 2.4

Seien X, Y metrische Räume und

$$C(X,Y) = \{\varphi : X \to Y \mid \varphi \text{ stetig}\}.$$

Sei Y beschränkt, d.h. es existiert $n \in \mathbb{R}$, so dass gilt: $d(p,q) \leq n$ für alle $p, q \in Y$. Setze

$$\begin{aligned} d_\infty : C(X,Y) \times C(X,Y) &\to \mathbb{R} \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \sup\{d(\varphi(p), \psi(p)) \mid p \in X\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(i) d_∞ ist eine Metrik auf $C(X,Y)$.

(ii) Wenn Y vollständig ist, dann ist $C(X,Y)$ vollständig bzgl. d_∞.