Prof. Dr. L. Kramer
Dr. O. Varghese SS 15

3. Hausaufgabenblatt zur Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie

(**Abgabe:** bis Donnerstag 30.04.2015, 14:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 3.1

Zeigen Sie, dass die folgenden Inklusionen echt sind:

$$\begin{aligned}\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ isometrische Einbettung }\} &\subseteq \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ Lipschitz-stetig }\}\\ &\subseteq \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ gleichmäßig stetig }\}\\ &\subseteq \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ stetig }\}\end{aligned}$$

Aufgabe 3.2

Sei X ein metrischer Raum, sei $Y \subseteq X$ eine nicht leere Teilmenge. Für $p \in X$ sei

$$d(p, Y) = \inf\{d(p, y) \mid y \in Y\}$$

Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi : X &\to \mathbb{R}\\ p &\mapsto d(p, Y)\end{aligned}$$

ist stetig.

(ii) Es gilt $d(p, Y) = 0$ genau dann, wenn $p \in \overline{Y}$.

Aufgabe 3.3

Gegeben sei $X = \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_L &= \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}\\ \widetilde{\mathcal{B}}_L &= \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}\\ \mathcal{B}_d &= \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}\\ \widetilde{\mathcal{B}}_d &= \{(a, b) \in \mathbb{Q}\}\end{aligned}$$

Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_L}, \mathcal{T}_{\widetilde{\mathcal{B}}_L}, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_d}, \mathcal{T}_{\widetilde{\mathcal{B}}_d}$ die erzeugten Topologien. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt: $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_L} = \mathcal{T}_{\widetilde{\mathcal{B}}_L}$.

(ii) Es gilt: $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_d} = \mathcal{T}_{\widetilde{\mathcal{B}}_d}$.

-bitte wenden-

Aufgabe 3.4

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $Y \subseteq X$ und $\epsilon > 0$ sei $V_\epsilon(Y) = \bigcup \{B_\epsilon(y) \mid y \in Y\}$. Für $A, B \subseteq X$ beschränkt und nichtleer setze den **Hausdorff-Abstand**

$$\mathrm{Hd}(A, B) = \inf \{\epsilon > 0 \mid A \subseteq V_\epsilon(B) \text{ und } B \subseteq V_\epsilon(A)\}.$$

Zeigen Sie:

(i) (a) Es gilt: $\mathrm{Hd}(\{a\}, \{b\}) = d(a, b)$.

(b) Es gilt $\mathrm{Hd}(A, B) = 0$ genau dann, wenn $\overline{A} = \overline{B}$.

(ii) Hd ist eine Metrik auf der Menge **B** aller abgeschlossenen beschränkten nichtleeren Teilmengen von X.

***-Aufgabe**

Wohlordnungssatz: *Jede nichtleere Menge kann wohlgeordnet werden.*

Beweisen Sie den Wohlordnungssatz mit Zorns Lemma:

(i) Sei X eine nichtleere Menge. Sei

$$\mathcal{P} = \{(Y, <_Y) \mid Y \subseteq X \text{ nichtleere Teilmenge und } <_Y \text{ ist eine Wohlordnung auf } Y\}$$

Zeigen Sie: $\mathcal{P} \neq \emptyset$

(ii) Definiere eine partielle Ordnung $\leq$ auf $\mathcal{P}$ durch

$$\begin{aligned}(Y, <_Y) \leq (Z, <_Z) \Leftrightarrow (Y \subseteq Z & \\ & \text{und für alle } p, q \in Y \text{ gilt: } p <_Y q \Leftrightarrow p <_Z q \\ & \text{und für alle } y \in Y, z \in Z - Y \text{ gilt: } y <_Z z)\end{aligned}$$

Zeigen Sie: $\mathcal{P}$ ist induktiv geordnet.

(iii) Zeigen Sie: ist $(Y, <_Y) \in \mathcal{P}$ ein maximales Element bezüglich $\leq$, dann ist $Y = X$.

(iv) Folgern Sie den Wohlordnungssatz.