Prof. Dr. L. Kramer
Dr. O. Varghese

SS 15

4. Hausaufgabenblatt zur Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie

(**Abgabe:** bis Freitag 08.05.2015, 14:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 4.1

(i) Gegeben sei $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ mit der üblichen Ordnung $<$. Sei weiter $\mathcal{T}_<$ die Ordnungstopologie bezüglich $<$ auf $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_<$ die diskrete Topologie ist.

(ii) Gegeben sei $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ mit der lexikographischen Ordnung. Sei weiter $\mathcal{T}_{LO}$ die Ordnungstopologie bezüglich der lexikographischer Ordnung auf $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_{LO}$ nicht die diskrete Topologie ist.

Aufgabe 4.2

Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{T}_<)$ topologische Räume. Seien weiter $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie:

(i) Die Menge $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ ist abgeschlossen in X.

(ii) Wir definieren

$$\begin{aligned} h : X &\to Y \\ x &\mapsto \min\{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass h stetig ist.

Aufgabe 4.3

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und C eine Menge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit $\bigcup C = X$. Wir nennen $V \subseteq X$ C-**offen**, wenn für alle $A \in C$ die Menge $V \cap A$ offen in A ist. Zeigen Sie:

(i) Die C-offenen Mengen bilden eine Topologie auf X.

(ii) Die Topologie der C-offenen Mengen ist feiner als $\mathcal{T}$.

(iii) Geben Sie ein Beispiel, wo die beiden Topologien nicht übereinstimmen.

(iv) Sei Y ein topologischer Raum und $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung. Wenn $\varphi : A \to Y$ für jedes $A \in C$ stetig ist, so ist φ stetig bezüglich der Topologie der C-offenen Mengen.

Definition: *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Der Raum X hat eine* **abzählbare Basis in x**, *falls eine Menge*

$$\mathcal{B}_x = \{B_i \mid i \in \mathbb{N}, B_i \text{ ist eine offene Umgebung von } x\}$$

existiert mit der Eigenschaft: für jede offene Umgebung U von x existiert $B_i \in \mathcal{B}_x$, so dass gilt $B_i \subseteq U$.

(i) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom**, *falls für jedes $x \in X$ eine abzählbare Basis in x existiert.*

(ii) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, *falls $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis besitzt.*

-bitte wenden-

Aufgabe 4.4

Gegeben sei $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_d = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$, $\mathcal{B}_L = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Seien weiter $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_d}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_L}$ die erzeugten Topologien. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_d})$ erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

(ii) $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_d})$ erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom.

(iii) $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_L})$ erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

(iv) $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_L})$ erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom.