Prof. Dr. L. Kramer
Dr. O. Varghese

7. Hausaufgabenblatt zur Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie

(**Abgabe:** bis Freitag 05.06.2015, 14:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Definition: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\varphi : V \to V$ heißt **affin**, wenn die Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} : V &\to V \\ v &\mapsto \varphi(v) - \varphi(0) \end{aligned}$$

für $v \in V$ linear ist.

Theorem (1932)

Sei V ein reeller normierter Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine bijektive Isometrie. Dann ist φ bereits affin.

Beweis: Sei im Folgenden V ein reeller normierter Verktorraum und $\varphi : V \to V$ eine bijektive Isometrie.

Aufgabe 7.1

Zeigen Sie, dass φ genau dann affin ist, wenn für alle $x, y \in V$ und alle $t \in [0, 1]$ gilt:

$$\varphi((1-t)x + ty) = (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y).$$

Aufgabe 7.2

Zeigen Sie, dass φ genau dann affin ist, wenn für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\varphi(\frac{1}{2}(x+y)) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(y)).$$

Aufgabe 7.3

Seien $x, y \in V$ beliebig. Wir definieren den **affinen Fehler** in x, y von φ wie folgt

$$\text{Fehler}_{x,y}(\varphi) := \|\varphi(\frac{1}{2}(x+y)) - \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(y))\|$$

Zeigen Sie, dass $\text{Fehler}_{x,y}(\varphi)$ unabhängig von φ nach oben beschränkt ist, d. h.: es existiert $K \in \mathbb{R}$, so dass für alle bijektiven Isometrien $f : V \to V$ gilt:

$$\text{Fehler}_{x,y}(f) \leq K.$$

Aufgabe 7.4

Seien $x, y \in V$ beliebig. Wir definieren

$$\begin{aligned} \rho : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto \varphi(x) + \varphi(y) - v \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi' : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto \varphi^{-1} \circ \rho \circ \varphi \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\text{Fehler}_{x,y}(\varphi') = 2 \cdot \text{Fehler}_{x,y}(\varphi)$$

***-Aufgabe**

Zeigen Sie mit den bewiesenen Aussagen in Aufgaben 7.1, 7.2, 7.3 und 7.4 das oben stehende Theorem.