Prof. Dr. L. Kramer
Dr. O. Varghese SS 15

8. Hausaufgabenblatt zur Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie

(**Abgabe:** bis Freitag 12.06.2015, 14:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 8.1

Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein Hausdorff-Raum und $\infty \notin X$. Wir definieren $\widehat{X} := X \cup \{\infty\}$ und

$$\mathcal{T}_{\widehat{X}} := \left\{ U \mid U \in \mathcal{T}_X \text{ oder } U = \widehat{X} - C \text{ und } C \subseteq X \text{ ist kompakt} \right\}$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) Die Menge $\mathcal{T}_{\widehat{X}}$ ist eine Topologie auf $\widehat{X}$.

(ii) Der Raum $(\widehat{X}, \mathcal{T}_{\widehat{X}})$ ist genau dann hausdorffsch, wenn jeder Punkt aus X eine kompakte Umgebung in X besitzt (dann nennt man X **lokalkompakt**).

(iii) Wenn X lokalkompakt ist, dann ist $(\widehat{X}, \mathcal{T}_{\widehat{X}})$ kompakt.

Aufgabe 8.2

Sei X normal und $U_1, \ldots, U_m \subseteq X$ offen mit $X = U_1 \cup \ldots \cup U_m$. Zeigen Sie:

(i) Es gibt $V_1, \ldots, V_m \subseteq X$ offen mit $\overline{V}_i \subseteq U_i$ und $X = V_1 \cup \ldots \cup V_m$.

(ii) Es gibt stetige Funktionen $\varphi_i : X \to [0,1]$ mit $\varphi_i(V_i) = \{1\}$, $\varphi_i(X - U_i) = \{0\}$ für $i = 1, \ldots, m$.

(iii) Es gibt stetige Funktionen $\overline{\varphi_i} : X \to [0,1]$ mit $\overline{\varphi_i}(X - U_i) = \{0\}$ und $\sum_{i=1}^{m} \overline{\varphi_i}(p) = 1$ für alle $p \in X$.

Man nennt $\left\{ \overline{\varphi}_i \mid i = 1, \ldots, m \right\}$ **Zerlegung der Eins** bezüglich $U_1, \ldots, U_m$.

Aufgabe 8.3

Sei K ein kompakter Hausdorff-Raum. Angenommen, zu jedem Punkt $p \in K$ gibt es eine Umgebung U_p von p und injektive stetige Abbildung $\xi_p : U_p \to \mathbb{R}^n$ injektiv und stetig (wobei n eventuell von U_p abhängt).

Zeigen Sie: es gibt eine stetige injektive Abbildung $\chi : K \to \mathbb{R}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und $\chi(K)$ ist homöomorph zu K.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 8.2.

-bitte wenden-

Aufgabe 8.4

Sei X normal mit einer abzälbaren Basis $\mathcal{B}$. Sei

$$I = \left\{(U, V) \mid U, V \in \mathcal{B}, \overline{U} \subseteq V\right\}.$$

Zeigen Sie:

(i) Für jedes Paar $(U, V) \in I$ gibt es eine stetige Abbildung

$$\varphi_{U,V} : X \to [0, 1]$$

mit $\varphi_{U,V}(U) = \{1\}$, $\varphi_{U,V}(X - V) = \{0\}$.

(ii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \chi : X &\to \prod_{i \in I} [0, 1] \\ p &\mapsto (\varphi_{(U,V)}(p))_{(U,V) \in I} \end{aligned}$$

ist stetig und injektiv.

(iii) Die Abbildung χ ist ein Homöomorphismus zwischen X und $\chi(X)$.

(iv) X ist metrisierbar.

***-Aufgabe**

Die Menge $\mathbb{R}$ ist mit Addition eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass man diese Addition nicht zu einer Gruppenstruktur auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fortsetzen kann.