

# 1. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“

WiSe 2015/16  
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer  
Nils Leder  
Cora Welsch

---

## Aufgabe 1.1

Sei  $G$  eine Gruppe. Zeige:  $G$  ist genau dann abelsch, wenn die Abbildung  $i : G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$  ein Gruppenhomomorphismus ist.

## Aufgabe 1.2

- Seien  $G, H$  Gruppen und  $\varphi : G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass für alle  $g \in G$  gilt:  $\text{ord}(\varphi(g)) \mid \text{ord}(g)$
- Bestimme alle Gruppenhomomorphismen  $\varphi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \text{Sym}(3)$  und  $\psi : \text{Sym}(3) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

## Aufgabe 1.3

Sei  $G$  eine Gruppe und seien  $A, B$  Untergruppen von  $G$ . Weiter sei  $A \cdot B$  gegeben durch  $\{ab \mid a \in A, b \in B\}$ .

- Beweise die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:
  - $A \cdot B$  ist eine Untergruppe von  $G$ .
  - $A \cdot B = B \cdot A$
- Gebe ein Beispiel für eine Gruppe  $G$  und Untergruppen  $A, B$  von  $G$  an, sodass  $A \cdot B$  keine Untergruppe von  $G$  ist.

## Aufgabe 1.4

Sei  $G$  eine Gruppe und  $H \leq G$  eine Untergruppe. Der *Normalisator* von  $H$  in  $G$  ist definiert als  $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ .

Zeige:  $N_G(H)$  ist die (bzgl. Mengeneinklusion) maximale Untergruppe von  $G$ , in welcher  $H$  ein Normalteiler ist. Insbesondere gilt also:  $H$  ist genau dann ein Normalteiler in  $G$ , wenn  $N_G(H) = G$  gilt.

*Bitte wenden.*

**\*-Aufgabe**

Sei  $G \times X \rightarrow X$  eine Wirkung und seien  $G$  und  $X$  endlich. Zeigen Sie, dass gilt

$$\#(G \backslash X) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \#X^g,$$

wobei  $X^g = \{x \in X \mid g(x) = x\}$  die Fixpunktmenge eines Elements  $g \in G$  und  $G \backslash X = \{G(x) \mid x \in X\}$  die Bahnenmenge ist. *Die Anzahl der Bahnen ist also gleich der durchschnittlichen Anzahl der Fixpunkte der einzelnen Gruppenelemente.*

*Hinweis:* Zeigen Sie zuerst  $\sum_{x \in X} \#G_x = \sum_{g \in G} \#X^g$  und benutzen Sie einen Schnitt  $S \subseteq X$ .

Die Übungszettel dürfen zu zweit bearbeitet werden. Pro Aufgabe können 4 Punkte erzielt werden.

Abgabe bis: Donnerstag, den 29.10.2015, 8 Uhr