11. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“
Musterlösung

WiSe 2015/16
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 11.1
Seien $\Gamma = (V, E)$ und $\Gamma' = (V', E')$ zusammenhängende Graphen und $x \in V$, $x' \in V'$.
Beweise: Gilt $\pi_1(|\Gamma|, x) \cong \pi_1(|\Gamma'|, x')$, so ist $|\Gamma|$ homotopieäquivalent zu $|\Gamma'|$.

Lösung: Sei $\pi_1(|\Gamma|, x) \cong \pi_1(|\Gamma'|, x')$. Nach einem Korollar zu Theorem 11 in Kapitel 6 der Vorlesung ist $|\Gamma|$ homotopieäquivalent zu der Rose mit $\operatorname{rk}(\pi_1(|\Gamma|, x))$ Blättern, wobei $\operatorname{rk}(\pi_1(|\Gamma|, x))$ der Rang der freien Gruppe $\pi_1(|\Gamma|, x)$ ist. Genauso ist $|\Gamma'|$ homotopieäquivalent zu einer Rose mit $\operatorname{rk}(\pi_1(|\Gamma'|, x'))$ Blättern.
Da die Fundamentalgruppen $\pi_1(|\Gamma|, x)$ und $\pi_1(|\Gamma'|, x')$ isomorph zueinander sind, haben sie den gleichen Rang. Somit sind $|\Gamma|$ und $|\Gamma'|$ homotopieäquivalent zu der Rose mit $\operatorname{rk}(\pi_1(|\Gamma|, x)) = \operatorname{rk}(\pi_1(|\Gamma'|, x'))$ Blättern.
Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation, also insbesondere transitiv. Folglich ist $|\Gamma|$ homotopieäquivalent zu $|\Gamma'|$.

Aufgabe 11.2

a) Sei $\Gamma = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $\#V > 1$. Sei G eine Gruppe, die auf Γ wirkt. Für $v \in V$ definiere die *Nachbarn* einer Ecke als die Elemente der Menge

$$S(v, 1) = \{w \in V \setminus \{v\} \mid \text{es gibt } e \in E \text{ mit } e_0 = v \text{ und } e_1 = w\}.$$

Zeige: Sind die beiden Bedingungen

i) Für alle $v \in V$ und alle $w_1, w_2 \in S(v, 1)$ existiert ein $h \in G$ mit $h(w_1) = w_2$.

ii) Es gibt $v_0 \in V$ und $g \in G$ so, dass $g(v_0) \in S(v_0, 1)$ ein Nachbar von v_0 ist.

erfüllt, so wirkt G transitiv auf V.

b) Gebe je ein Beispiel für eine nicht-transitive Wirkung einer Gruppe G auf einen Graphen Γ so, dass

- *i)* und *ii)* gelten, Γ aber nicht zusammenhängend ist.
- *i)* gilt und Γ zusammenhängend ist, aber *ii)* nicht erfüllt ist.
- *ii)* gilt und Γ zusammenhängend ist, aber *i)* nicht erfüllt ist.

Lösung:

a) Seien die Bedingungen $i)$ und $ii)$ erfüllt. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $B(v_0, n)$ die Menge der Ecken, die höchstens Abstand n zu v_0 haben. (Dabei ist der Abstand zwischen zwei Ecken v und w definiert als die Länge eines minimalen Kantenwegs von v nach w.)
Um zu beweisen, dass G transitiv ist, genügt es zu zeigen, dass $G(v_0) = V$ ist. Dafür zeigen wir induktiv, dass $B(v_0, n)$ in $G(v_0)$ enthalten ist für alle $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt $B(v_0, 0) = \{v_0\}$ und es ist nichts zu zeigen. Für $n = 1$ haben wir nach Definition $B(v_0, 1) = S(v, 1)$.
Sei $w \in S(v, 1)$ beliebig. Da $g(v_0)$ (nach Bedingung $ii)$) und w benachbart zu v_0 sind, existiert nach Bedingung $i)$ ein $h \in G$ mit $h(g(v_0)) = w$ und es gilt $w = hg(v_0) \in G(v_0)$.
Da $w \in B(v_0, 1) = S(v, 1)$ beliebig war, folgt $B(v_0, 1) \subseteq G(v_0)$.
Induktionsschritt: Sei die Induktionsvoraussetzung $B(v_0, k) \subseteq G(v_0)$ richtig für alle $k \leq n$ für ein beliebiges $n \geq 1$.
Zu zeigen: $B(v_0, n + 1) \subseteq G(v_0)$
Sei $x \in B(v_0, n + 1)$ beliebig. Nach Definition gibt es einen minimalen Kantenweg $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ von $v_0 = (e_1)_0$ nach $x = (e_{n+1})_1$. Setze $y := (e_{n-1})_1 = (e_n)_0$ und $z := (e_n)_1 = (e_{n+1})_0$.
Es ist $y = (e_{n-1})_1 \in B(v_0, n - 1)$ und nach Voraussetzung gilt $B(v_0, n - 1) \subseteq G(v_0)$. Daher existiert $g_1 \in G$ mit $g_1(v_0) = y$. Da der Kantenweg $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ minimal ist, gilt $y \neq z$ und $z \neq x$. Weiter sind x und y Nachbarn von z. Wegen Bedingung $i)$ gibt es $g_2 \in G$ mit $g_2(y) = x$. Nun erhalten wir:

$$x = g_2(y) = g_2(g_1(v_0)) = g_2 g_1(v_0) \in G(v_0)$$

Da $x \in B(v_0, n + 1)$ beliebig war, gilt $B(v_0, n + 1) \subseteq G(v_0)$.
Hiermit ist die Induktion abgeschlossen und $B(v_0, n+1) \subseteq G(v_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.
Weil der Graph Γ zusammenhängend ist, gilt $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B(v_0, n) = V$. Damit folgt $V = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B(v_0, n) \subseteq G(v_0)$, d.h. $G(v_0) = V$ und die Wirkung von G auf V ist transitiv.

b) 1.Beispiel: Sei $\Gamma = (V, E)$ der Graph mit Ecken $V = \mathbb{Z} \times \{1, 2\}$ und je einer Kante $e_{z,i} \in E$ mit $(e_{z,i})_0 = (z, i)$ und $(e_{z,i})_1 = (z + 1, i)$ (und der entsprechenden umgekehrten Kante $\bar{e}_{z,i}$) für $z \in \mathbb{Z}, i \in \{1, 2\}$.
Die Gruppe $\mathbb{Z}$ wirkt auf Γ durch $n(z, i) = (z + n, i)$ für $n, z \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, 2\}$. (Anschaulich besteht $|\Gamma|$ aus zwei disjunkten Geraden auf denen $\mathbb{Z}$ durch Translationen wirkt.)
Diese Wirkung ist nicht transitiv, da $n(0, 1) = (n, 1) \neq (0, 2)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Da es nach Definition keine Kante von einem Punkt der Form $(z, 1)$ zu einem Punkt der Form $(z', 2)$ gibt, existiert kein Kantenweg von $(0, 1)$ nach $(0, 2)$, d.h. Γ ist nicht zusammenhängend.
Eine beliebige Ecke (z, i) mit $z \in \mathbb{Z}, i \in \{1, 2\}$ hat genau die zwei Nachbarn $(z - 1, i)$ und $(z + 1, i)$ und es gilt $2(z - 1, i) = (z + 1, i)$.
Somit ist die Bedingung $i)$ für die $\mathbb{Z}$-Wirkung gewährleistet.
Weiter ist $(1, 1)$ ein Nachbar von $(0, 1)$ und es gilt $1(0, 1) = (1, 1)$

Insgesamt erfüllt die $\mathbb{Z}$-Wirkung auf dem nicht-zusammenhängenden Graphen Γ die Bedingungen $i)$ und $ii)$ (und ist nicht transitiv).
2. Beispiel: Sei $\Gamma = (V, E)$ der Graph mit Ecken $V = \mathbb{Z}$ und je einer Kante $e(n) \in E$ mit $e(n)_0 = n$ und $e(n)_1 = n + 1$ (sowie der dazugehörigen umgekehrten Kanten $\bar{e}(n)$) für $n \in \mathbb{Z}$. Die Gruppe der geraden (ganzen) Zahlen $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ operiert durch Translationen auf Γ, d.h. $z(n) = n + z$ für $n \in \mathbb{Z}, z \in 2\mathbb{Z}$.
Die Bahn der Ecke 0 ist genau die Menge der geraden Zahlen $2\mathbb{Z} \subseteq V$. Dies ist eine echte Teilmenge von V und die Wirkung daher nicht transitiv. Da die Nachbarn einer Ecke n genau $n - 1$ und $n + 1$ sind und $2(n - 1) = n - 1 + 2 = n + 1$ gilt, ist die Bedingung $i)$ erfüllt.
Weiter ist für $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n < m$ $(e_n, \ldots, e_{m-1})$ ein Kantenweg von n nach m, d.h. der Graph Γ ist zusammenhängend. Ferner bildet kein $z \in 2\mathbb{Z}$ eine Ecke v auf einen Nachbarn von v ab.
Insgesamt erfüllt die $2\mathbb{Z}$-Wirkung auf dem zusammenhängenden Graphen Γ die Bedingung $i)$, nicht aber die Bedingung $ii)$ (und ist nicht transitiv).
3. Beispiel: Betrachte den Graphen Γ aus Beispiel 1. Sei Γ' der Graph, der aus Γ entsteht, indem für jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine Kante $e'_k \in E$ mit $(e'_k)_0 = (k, 1)$ und $(e'_k)_1 = (k, 2)$ (sowie die umgekehrte Kante $\bar{e}'_k$) hinzugefügt wird. (Anschaulich entsteht nun aus den beiden disjunkten Geraden eine unendlich lange Leiter mit den Sprossen e'_k.)
Man sieht leicht, dass Γ' zusammenhängend ist.
Die im 1. Beispiel definierte $\mathbb{Z}$-Wirkung ist auch auf Γ' wohldefiniert, nicht-transitiv und erfüllt die Bedingung $ii)$. Da jedoch in Γ' die Ecke $(0, 2)$ benachbart zu $(0, 1)$ ist und $n(-1, 1) = (n - 1, 1) \neq (0, 2)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt, ist die Bedingung $i)$ ist nicht erfüllt.

Aufgabe 11.3
Zeichne die Cayleygraphen der folgenden Gruppen G_i bzgl. des jeweiligen Erzeugendensystems S_i:

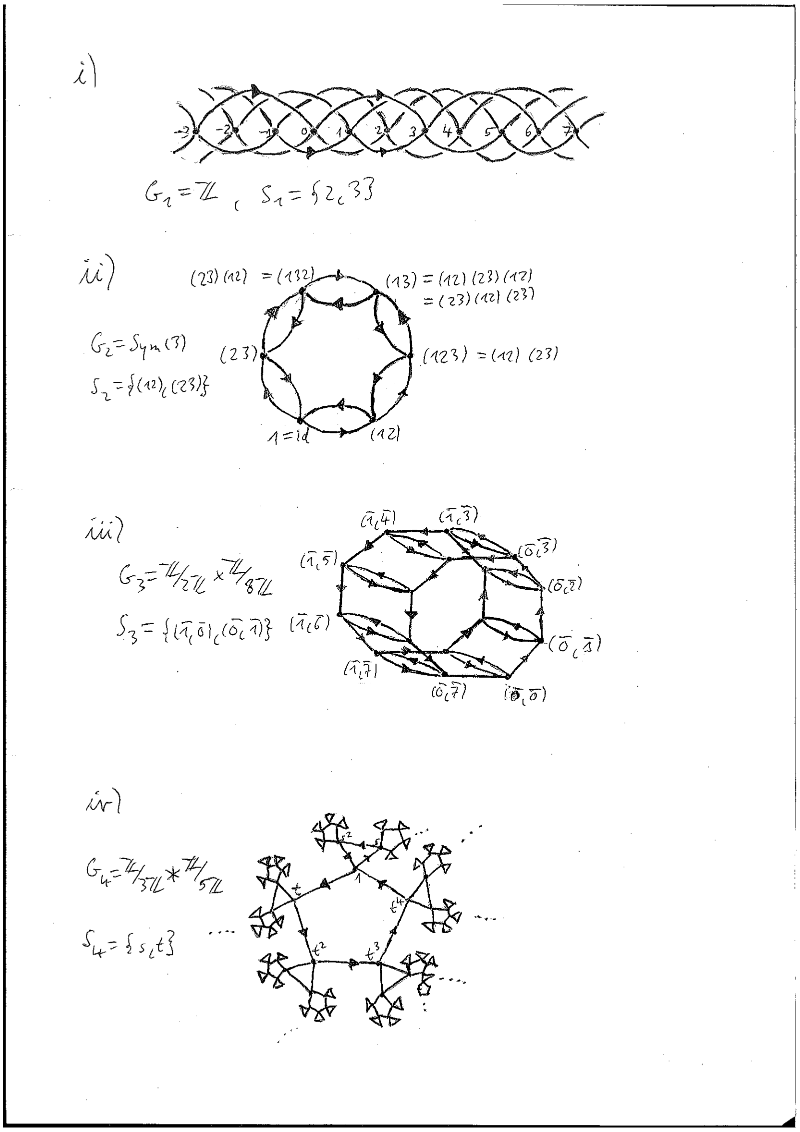
i) $G_1 = \mathbb{Z}$ mit $S_1 = \{2, 3\}$

ii) $G_2 = \mathrm{Sym}(3)$ mit $S_2 = \{(12), (23)\}$

iii) $G_3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ mit $S_3 = \{(1 + 2\mathbb{Z}, 0), (0, 1 + 8\mathbb{Z})\}$

iv) $G_4 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ mit $S_4 = \{s, t\}$, wobei s ein Erzeuger von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und t ein Erzeuger von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sei

Lösung:



Aufgabe 11.4
Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ ein Erzeugendensystem. Für einen Kantenweg $\alpha = (e_1, \ldots, e_n)$ im Cayleygraph $\Gamma(G, S)$ mit $(e_1)_0 = (e_n)_1 = 1 \in G$ sei $s_\alpha := s(e_1) \cdot s(e_2) \cdot \ldots \cdot s(e_n)$, wobei $s(e_i) \in S \cup S^{-1}$ mit $(e_i)_0 \cdot s(e_i) = (e_i)_1$ sei.
Zeige: G besitzt die Präsentierung

$$G \cong \langle S \mid \{ s_\alpha \mid \alpha \text{ Kantenweg in } \Gamma(G, S) \text{ von 1 nach 1} \} \rangle.$$

Lösung: Sei $G' := \langle S \mid \{s_\alpha \mid \alpha \text{ Kantenweg in } \Gamma(G,S) \text{ von 1 nach 1}\}\rangle$.
Wir definieren einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : G' \to G$ und zeigen, dass dieser ein Isomorphismus ist:
Sei $F(S)$ die von S frei erzeugte Gruppe und $\tilde{\varphi} : F(S) \to G$ der durch die Inklusion $S \hookrightarrow G$ induzierte Homomorphismus. Sei $\alpha = (e_1, \ldots, e_n)$ ein beliebiger Kantenweg in $\Gamma(G,S)$ von 1 nach 1. Nach Definition der Elemente $s(e_i)$ gilt $(e_i)_1 = s(e_1) \cdot \ldots \cdot s(e_i)$. Insbesondere gilt:

$$1 = (e_n)_1 = s(e_1) \cdot \ldots \cdot s(e_n) = \tilde{\varphi}(s(e_1) \cdot \ldots \cdot s(e_n)) = \tilde{\varphi}(s_\alpha)$$

Es gilt also $s_\alpha \in \ker(\tilde{\varphi})$ für jeden Kantenweg α in $\Gamma(G,S)$ von 1 nach 1. Nach der universellen Eigenschaft der Gruppe G'existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\varphi : G' \to G$ mit $\varphi \circ \pi = \tilde{\varphi}$, wobei $\pi : F(S) \to G'$ die kanonische Projektion ist. Zu zeigen: φ ist ein Isomorphismus.
surjektiv: Nach Definition liegt die Erzeugermenge S im Bild des Homomorphismus $\tilde{\varphi}$, d.h. $\tilde{\varphi}$ ist ein Epimorphismus. Da die Komposition $\varphi \circ \pi = \tilde{\varphi}$ surjektiv ist, ist φ surjektiv.
injektiv: Sei $x \in G'$ mit $\varphi(x) = 1$ beliebig. Da G' von S erzeugt wird, gibt es $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$ mit $s_1 \cdot \ldots \cdot s_n = x$. Wegen $\varphi(x) = 1$ gilt $s_1 \cdot \ldots \cdot s_n = 1$ in G.
Nach Definition des Cayleygraphen gibt es eine Kante e_1 mit $(e_1)_0 = 1$ und $(e_1)_1 = s_1$, eine Kante e_2 mit $(e_2)_0 = s_1$ und $(e_2)_1 = s_1 s_2$ und allgemein für jedes $i = 1, \ldots, n$ eine Kante e_i mit $(e_i)_0 = s_1 \cdot \ldots \cdot s_{i-1}$ und $(e_i)_1 = s_1 \cdot \ldots \cdot s_i$. Dann ist $\alpha := (e_1, \ldots, e_n)$ ein Kantenweg von 1 nach $s_1 \cdot \ldots \cdot s_n = 1$. Weiter gilt nach Konstruktion $s(e_i) = s_i$ für $i = 1, \ldots, n$, d.h. $x = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n = s(e_1) \cdot \ldots \cdot s(e_n) = s_\alpha$. Nach Definition der Relationen in der Präsentierung von G' gilt damit $x = 1$ in G' und φ ist injektiv.
Insgesamt ist φ ein bijektiver Homomorphismus, also ein Isomorphismus und $\langle S \mid \{s_\alpha \mid \alpha \text{ Kantenweg in } \Gamma(G,S) \text{ von 1 nach 1}\}\rangle$ ist eine Präsentierung der Gruppe G.

***-Aufgabe**
Sei X der topologische Raum, der aus einem 2-Torus entsteht, indem in einem Punkt ein Kreis angeklebt wird. Formal: Sei $\mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1$ der 2-Torus und $p := (1,0) \in S^1$. Definiere eine Äquivalenzrelation auf $S^1 \dot\cup \mathbb{T}^2$ durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow x = y \vee (x = p \wedge y = (p,p)) \vee (x = (p,p) \wedge y = p)$$

und setze $X := (S^1 \dot\cup \mathbb{T}^2)/\sim$ (versehen mit der Quotiententopologie).
Bestimme die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$, wobei $x_0 = [p]$ die Äquivalenzklasse von p sei.

Lösung: Wir wollen den Satz von Seifert-van Kampen auf eine geeignete offene Überdeckung von X anwenden.
Sei I eine offene Umgebung von p in S^1, die homöomorph zu einem offenen Intervall ist. Sei weiter B eine offene Umgebung von (p,p) in $\mathbb{T}^2$, die homöomorph zu einem offenen Ball in $\mathbb{R}^2$ ist. Setze $U := q(S^1 \dot\cup B)$ und $V := q(I \dot\cup \mathbb{T}^2)$, wobei $q : S^1 \times \mathbb{T}^2 \to X$ die Quotientenabbildung sei. Nach Definition der Quotiententopologie sind U und V offene Umgebungen von

$x_0 = [p]$. Weiter gilt

$$U \cup V = q(S^1 \dot{\cup} B) \cup q(I \dot{\cup} \mathbb{T}^2) = q((S^1 \dot{\cup} B) \cup (I \dot{\cup} \mathbb{T}^2)) = q(S^1 \dot{\cup} \mathbb{T}^2) = X,$$

d.h. U und V bilden eine offene Überdeckung von X. Da S^1 und B wegzusammenhängend sind, gibt es von jedem Punkt $x \in U$ einen stetigen Weg in U von x nach x_0. Also ist U wegzusammenhängend. Genauso zeigt man, dass V wegzusammenhängend ist. Weiter gilt $U \cap V = q(I \dot{\cup} B)$ und $U \cap V$ ist ebenfalls wegzusammenhängend.
Damit sind die Voraussetzungen für den Satz von Seifert-van Kampen erfüllt und wir erhalten:

$$\pi_1(X, x_0) = \varinjlim(\pi_1(U, x_0) \leftarrow \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(V, x_0))$$

Nun bestimmen wir die Fundamentalgruppen $\pi_1(U, x_0), \pi_1(V, x_0)$ und $\pi_1(U \cap V, x_0)$.
Da B homöomorph zu einem offenen Ball in $\mathbb{R}^2$ ist, existiert eine Deformationsretraktion $F : B \times [0,1] \rightarrow B$ von B auf den Punkt (p, p). Nun definiert die Abbildung $F' : U \times [0,1] \rightarrow U$ gegeben durch

$$(u, s) \mapsto \begin{cases} F_s(b) & \text{falls } u = [b] \text{ für ein } b \in B \\ u & \text{falls } u = [z] \text{ für ein } z \in S^1 \end{cases}$$

eine Deformationsretraktion von U auf $S^1 \subseteq X$. Nach Aufgabe 8.1 b) gilt also $\pi_1(U, x_0) \cong \pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$.
Da I homöomorph zu einem offenen Intervall ist, existiert eine Deformationsretraktion $G : I \times [0,1] \rightarrow I$ von I auf den Punkt p. Analog wie oben ist dann $G' : V \times [0,1] \rightarrow V, (v, s) \mapsto \begin{cases} G_s(t) & \text{falls } v = [t] \text{ für ein } t \in I \\ v & \text{falls } v = [y] \text{ für ein } y \in \mathbb{T}^2 \end{cases}$
eine Deformationsretraktion von V auf $\mathbb{T}^2$.
Mit Aufgabe 8.1 b) und Satz 5 aus Kapitel 5 der Vorlesung folgt:

$$\begin{aligned} \pi_1(V, x_0) &\cong \pi_1(\mathbb{T}, (p, p)) = \pi_1(S^1 \times S^1, (p, p)) \\ &\cong \pi_1(S^1, p) \times \pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass $U \cap V = q(I \dot{\cup} B)$ kontrahierbar ist, indem wir mithilfe der Abbildungen F und G eine Deformationsretraktion H von $U \cap V$ auf den Punkt x_0 konstruieren. Definiere $H : (U \cap V) \times [0,1] \rightarrow U \cap V$,

$$(x, s) \mapsto \begin{cases} F_s(x) & \text{falls } x = [b] \text{ für ein } b \in B \\ G_s(t) & \text{falls } x = [t] \text{ für ein } t \in I \end{cases}.$$

Da $F_s(p, p) = (p, p)$ und $G_s(p) = p$ für alle $s \in [0,1]$ gilt, stimmen die beiden Definitionen für $x_0 = [p]$ überein und H ist eine wohldefinierte stetige Abbildung, welche eine Deformationsretraktion von $U \cap V$ auf x_0 definiert. Somit ist $U \cap V$ kontrahierbar und es gilt $\pi_1(U \cap V, x_0) = \{1\}$.
Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &= \varinjlim(\pi_1(U, x_0) \leftarrow \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(V, x_0)) \\ &\cong \varinjlim(\mathbb{Z} \leftarrow \{1\} \rightarrow \mathbb{Z}^2) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$