1. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“
Musterlösung

SoSe 2016
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 1.1
Häufig wird der Begriff der quasi-Isometrie wie folgt eingeführt:
Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen X, Y heißt *quasi-isometrische Einbettung*, wenn es Konstanten $\lambda \geq 1$ und $\varepsilon \geq 0$ gibt, so dass

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_1, x_2) - \varepsilon \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda\, d_X(x_1, x_2) + \varepsilon$$

für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt. Eine quasi-isometrische Einbettung f heißt dann *quasi-Isometrie*, wenn es eine Konstante $R \geq 0$ gibt, so dass für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $d(f(x), y) \leq R$ existiert.
Zeige: Diese Definition von quasi-Isometrie ist äquivalent zu der Definition in der Vorlesung.

Lösung: Zuerst beweisen wir, dass die neue Definition die Definition in der Vorlesung impliziert. Sei also f eine quasi-Isometrie (im Sinne des Zettels) mit den Konstanten λ, ε und R. Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in X$ nach der rechten Ungleichung:

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + \varepsilon$$

Damit ist f nach Definition (λ, ε)-grob Lipschitz.
Wähle nun für jedes $y \in Y$ ein $x_y \in X$ mit $d_Y(f(x_y), y) \leq R$. Definiere $g : Y \to X$ durch $g(y) = x_y$. Wir wollen zeigen, dass g grob Lipschitz ist.
Seien $y, y' \in Y$ beliebig. Nach der linken Ungleichung in der neuen Definition und der Dreiecksungleichung gilt dann:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} d_X(g(y), g(y')) - \varepsilon &\leq d_Y(f \circ g(y), f \circ g(y')) = d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) \\ &\leq d_Y(f(x_y), y) + d_Y(y, y') + d_Y(y', f(x_{y'})) \\ &\leq d_Y(y, y') + 2R\end{aligned}$$

Durch Umstellen erhalten wir daraus:

$$d_X(g(y), g(y')) \leq \lambda d_Y(y, y') + 2\lambda R + \lambda\varepsilon$$

Somit ist g eine $(\lambda, 2\lambda R + \lambda\varepsilon)$-grobe Lipschitz-Abbildung.
Es bleibt noch zu zeigen, dass $f \circ g$ und $g \circ f$ endlichen Abstand zu id_Y bzw. id_X haben.
Sei $y \in Y$ beliebig. Dann gilt nach Wahl von x_y:

$$d_Y(f \circ g(y), y) = d(f(x_y), y) \leq R < \infty$$

Sei $x \in X$ beliebig. Es ergibt sich aus der Wahl von $x_{f(x)}$ und der linken Ungleichung:

$$d_X(g \circ f(x), x) = d_X(x_{f(x)}, x) \leq \lambda \cdot (d_Y(f(x_{f(x)}), f(x)) + \varepsilon) \leq \lambda \cdot (R + \varepsilon) < \infty$$

Damit haben $f \circ g$ und $g \circ f$ endlichen Abstand zur jeweiligen Identitätsabbildung. Insgesamt ist f eine quasi-Isometrie nach Definition der Vorlesung.
Nun zeigen wir, dass jede quasi-isometrie nach Vorlesungsdefinition ebenfalls eine quasi-Isometrie nach der Definition auf dem Zettel ist.
Sei $f : X \to Y$ eine quasi-Isometrie im Sinne der Vorlesung. Dann gibt es eine Abbildung $g : Y \to X$ und Konstanten L_1, c_1, L_2 und c_2, so dass f eine (L_1, c_1)-grobe Lipschitz-Abbildung und g eine (L_2, c_2)-grobe Lipschitz-Abbildung ist und $g \circ f$ endlichen Abstand zu id_X und $f \circ g$ endlichen Abstand zu id_Y hat. Seien $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $d_X(g \circ f(x), x) \leq R_1$ und $d_Y(f \circ g(y), y) \leq R_2$ für alle $x \in X, y \in Y$.
Seien $x_1, x_2 \in X$ beliebig. Da f (L_1, c_1)-grob Lipschitz ist, gilt dann

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L_1 d_X(x_1, x_2)) + c_1.$$

Analog ergibt sich $d_X(g \circ f(x_1), g \circ f(x_2)) \leq L_2 d_Y(f(x_1), f(x_2)) + c_2$.
Hieraus folgt mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d_X(x_1, x_2) &\leq d_X(x_1, g \circ f(x_1)) + d_X(g \circ f(x_1), g \circ f(x_2)) + d_X(g \circ f(x_2), x_2) \\ &\leq R_1 + L_2 d_Y(f(x_1), f(x_2)) + c_2 + R_1 \\ &= L_2 d_Y(f(x_1), f(x_2)) + 2R_1 + c_2 \end{aligned}$$

Durch Umstellen erhalten wir:

$$\frac{1}{L_2} \cdot d_X(x_1, x_2) - \frac{2R_1 + c_2}{L_2} \leq d_Y(f(x_1), f(x_2))$$

Daraus folgt, dass f die definierende Ungleichung einer quasi-isometrischen Einbettung mit den Konstanten $\lambda := \max\{L_1, L_2\}$ und $\varepsilon := \max\{c_1, \frac{2R_1+c_2}{L_2}\}$ erfüllt.
Ist $y \in Y$ beliebig. So gilt für $x := g(y)$:

$$d(f(x), y) = d(f \circ g(y), y) \leq R_2$$

Damit erfüllt f für $R = R_2$ auch die zweite Bedingung der neuen Definition. Insgesamt ist f eine quasi-Isometrie nach der Definition auf dem Zettel und wir haben gezeigt, dass beide Definitionen zueinander äquivalent sind.

Aufgabe 1.2
Zeige, dass die Relation metrischer Räume, quasi-isometrisch zueinander zu sein, eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung: Wir schreiben $X \sim Y$ für „X ist quasi-isometrisch zu Y“. Es ist zu zeigen, dass die Relation $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
<u>reflexiv</u>: Sei X ein beliebiger metrischer Raum. Dann ist die Identität id_X eine Isometrie und damit insbesondere eine quasi-Isometrie. Also gilt $X \sim X$ und $\sim$ ist reflexiv.
<u>symmetrisch</u>: Da die Definition von quasi-Isometrie symmetrisch ist, ist hier nichts zu zeigen.
<u>transitiv</u>: Es ist zu zeigen: $X \sim Y$ und $Y \sim Z$ impliziert $X \sim Z$.
Wir beweisen zunächst, dass die Verknüpfung $f \circ g$ von groben Lipschitz-Abschildungen f und g wieder grob Lipschitz ist.

Seien X_1, X_2 und X_3 metrische Räume und $f_1 : X_1 \to X_2$ eine (L_1, c_1)- sowie $f_2 : X_2 \to X_3$ eine $L_2, c_2)$-grobe Lipschitz- Abbildung. Dann gilt für $x, y \in X_1$:

$$\begin{aligned} d_{X_3}(f_2 f_1(x), f_2 f_1(y))) &\leq L_2 d_{X_2}(f_1(x), f_1(y)) \\ &\leq L_2 \cdot (L_1 \cdot d_{X_1}(x, y) + c_1) + c_2 \\ &= L_1 L_2 \cdot d_{X_1}(x, y) + (L_2 c_1 + c_2) \end{aligned}$$

Folglich ist $f_2 \circ f_1$ eine $(L_1 L_2, L_2 c_1 + c_2)$-grobe Lipschitz-Abbildung.
Seien nun $X \sim Y$ und $Y \sim Z$. Dann existieren grobe Lipschitz-Abbildungen $f : X \to Y, g : Y \to X, h : Y \to Z$ und $l : Z \to Y$, so dass $g \circ f$ endlichen Abstand zu id_X, $f \circ g$ sowie $l \circ h$ endlichen Abstand zu id_Y und $h \circ l$ endlichen Abstand zu id_Z hat.
Wir zeigen nun, dass dann auch $h \circ f : X \to Z$ und $g \circ l : Z \to X$ Quasi-Isometrien sind.
Da Verknüpfungen grober Lipschitz-Abbildungen grob Lipschitz sind, sind $h \circ f$ und $l \circ g$ grob Lipschitz.
Zu zeigen: $(g \circ l) \circ (h \circ f)$ hat endlichen Abstand zu $\mathrm{id_X}$. Sei $x \in X$ beliebig. Sei g eine (L_2, c_2)-grobe Lipschitz-Abbildung. Seien weiter $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in X, y \in Y$ gilt $d_X(g \circ f(x), x) \leq R_1$ und $d_Y(l \circ h(y), y) \leq R_2$.
Dann gilt nach der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d_X(g \circ l \circ h \circ f(x), x) &\leq d_X(g \circ l \circ h \circ f(x), g \circ f(x)) + d_X(g \circ f(x), x) \\ &\leq L_2 \cdot d_Y(l \circ h \circ f(x), f(x)) + c_2 + R_1 \\ &\leq L_2 \cdot R_2 + c_2 + R_1 < \infty \end{aligned}$$

Genauso zeigt man, dass $(h \circ f) \circ (g \circ l)$ endlichen Abstand zu id_Z hat. Somit ist $h \circ f$ eine quasi-Isometrie und es gilt $X \sim Z$. Die Relation $\sim$ ist damit transitiv. Insgesamt ist $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 1.3
Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und N ein Normalteiler in G. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent zueinander sind:

i) N ist endlich.

ii) Die kanonische Projektion $G \to G/N$ ist eine quasi-Isometrie.

Lösung: Sei $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ eine endliche Erzeugendenmenge von G und d_S die von S induzierte Wortmetrik auf G. Offenbar erzeugt dann $T := \{s_1 N, \ldots, s_k N\}$ die Faktorgruppe G/N und induziert eine Wortmetrik d_T.
„$i) \Rightarrow ii)$“ Sei N endlich. Dann existiert das Maximum $m := \max\{l_s(n) \mid n \in N\}$. Sei weiter $(x_i)_{i \in I}$ ein Linkstransversal zu N in G (d.h. zu jedem $g \in G$ gibt es ein eindeutiges $i \in I$ mit $gN = x_i N$). Definiere nun $\varphi : G/N \to G$ durch $gN \mapsto x_i$ für das eindeutige x_i mit $x_i N = gN$.
Wir zeigen zuerst, dass φ und π bzgl. der Wortmetriken d_S und d_T grob Lipschitz sind.
Ist $g \in G$ beliebig, so gilt $l_T(gN) \leq l_S(g)$. Denn ist $g = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_l}^{\varepsilon_l}$ mit $s_{i_j} \in S, \varepsilon_j \in \{1, -1\}$ eine Darstellung von g als Produkt von Elementen aus

$S \cup S^{-1}$, so ist $gN = (s_{i_1}N)^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot (s_{i_l}N)^{\varepsilon_l}$ eine höchstens genauso lange Darstellung von gN als Produkt von Elementen aus $T \cup T^{-1}$. Damit erhalten wir für beliebige $x, y \in G$:

$$\begin{aligned} d_T(\pi(x), \pi(y)) &= l_T(\pi(x)^{-1}\pi(y)) = l_T(\pi(x^{-1}y)) = l_T(x^{-1}yN) \\ &\leq l_S(x^{-1}y) = d_S(x, y) = 1 \cdot d_S(x, y) + 0 \end{aligned}$$

Damit ist π $(1, 0)$-grob Lipschitz.
Für beliebiges $g \in G$ gilt zudem $l_S(g) \leq l_T(gN) + m$. Um dies zu sehen, sei $gN = (s_{i_1}N)^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot (s_{i_l}N)^{\varepsilon_l}$ eine kürzeste Darstellung von gN als Produkt von Elementen aus $T \cup T^{-1}$, d.h. $l = l_T(gN)$. Setze $z := s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_l}^{\varepsilon_l}$. Dann gilt $zN = gN$ und wegen der Minimalität folgt $l_S(z) = l_T(gN)$. Weiter impliziert $z^{-1}g \in N$, dass $l_S(z^{-1}g) \leq m$ gilt. Insgesamt erhalten wir daher:

$$l_S(g) = l_S(z(z^{-1}g)) \leq l_S(z) + l_S(z^{-1}g) \leq l_T(gN) + m$$

Seien nun $gN, hN \in G/N$ beliebig. Seien weiter $i, j \in I$ mit $gN = x_iN$ und $hN = x_jN$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d_S(\varphi(gN), \varphi(hN)) &= d_S(x_i, x_j) = l_S(x_i^{-1}x_j) \leq l_T(x_i^{-1}x_jN) + m \\ &= l_T((x_iN)^{-1}x_jN) + m = l_T((gN)^{-1}hN) + m \\ &= 1 \cdot d_T(gN, hN) + m \end{aligned}$$

Also ist φ $(1, m)$-grob Lipschitz. Nun beweisen wir, dass $\pi \circ \varphi$ und $\varphi \circ \pi$ endlichen Abstand zu $\mathrm{id}_{G/N}$ bzw. zu id_N hat.
Sei $gN \in G/N$ beliebig und $i \in I$ mit $x_iN = gN$. Dann gilt:

$$d_T(\pi \circ \varphi(gN), gN) = d_T(\pi(x_iN), gN) = d_T(x_iN, gN) = d_T(gN, gN) = 0 < \infty$$

Sei $g \in G$ beliebig und $i \in I$ mit $gN = x_iN$, also $x_i^{-1}g \in N$ und damit insbesondere $l_S(x_i^{-1}g) \leq m$. Es gilt:

$$d_S(\varphi \circ \pi(g), g) = d_S(\varphi(gN), g) = d_S(x_i, g) = l_S(x_i^{-1}g) \leq m < \infty$$

Damit haben $\pi \circ \varphi$ und $\varphi \circ \pi$ endlichen Abstand zur jeweiligen Identitätsabbildung. Nach Definition ist π eine quasi-Isometrie.
„*ii)* $\Rightarrow$ *i)*“ Sei π eine quasi-Isometrie. Dann gibt es eine Abbildung $\varphi : G/N \to G$, so dass $\varphi \circ \pi$ endlichen Abstand zu id_G hat. Das heißt, es existiert $R \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $d_S(\varphi \circ \pi(g), g) \leq R$ für alle $g \in G$ gilt.
Wir zeigen nun, dass

$$N \subseteq B_{2R}(1) = \{g \in G \mid d_S(1, g) \leq 2R\}$$

gilt, N also im abgeschlossenen Ball um 1 mit Radius $2R$ liegt.
Seien $n, n' \in N$ beliebig. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d_S(n, n') &\leq d_S(n, \varphi \circ \pi(n)) + d_S(\varphi \circ \pi(n), \varphi \circ \pi(n')) + d_S(\varphi \circ \pi(n'), n') \\ &\leq R + d_S(\varphi(nN), \varphi(n'N)) + R = 2R + d_S(\varphi(N), \varphi(N)) \\ &= 2R + 0 = 2R \end{aligned}$$

Einsetzen von $n = 1 \in N$ ergibt $N \subseteq B_{2R}(1)$.
Nun enthält aber $B_{2R}(1)$ höchstens $(2\#S)^{2R} + 1 < \infty$ Elemente und N ist als

Teilmenge einer endlichen Menge endlich.

Aufgabe 1.4
Zeige, dass für natürliche Zahlen $n \neq m$ die reellen Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ (versehen mit beliebigen Normen) nicht zueinander quasi-isometrisch sind.

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass der quasi-Isometrietyp von $\mathbb{R}^n$ nicht von der gewählten Norm abhängt. Seien $\|.\|$ und $|||.|||$ zwei beliebige Normen auf dem $\mathbb{R}^n$. Aus der Analysis ist bekannt, dass alle Normen auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Damit ist die Identität $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^n, \|.\|) \to (\mathbb{R}^n, |||.|||)$ grob Lipschitz. Betrachtet man die Identität nun als Abbildung in der umgekehrten Richtung, wird sofort klar, dass id eine quasi-Isometrie ist.
Es genügt daher zu zeigen, dass für $n \neq m$ die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ versehen mit der 1-Norm nicht quasi-isometrisch zueinander sind.
Betrachte dafür die isometrische Wirkung von $\mathbb{Z}^n$ auf $(\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$ durch Translation, d.h. $z(v) = v + z$ für $z \in \mathbb{Z}^n, v \in \mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ ist geodätisch bzgl. $\|.\|_1$, also $(1,0)$-quasi-geodätisch. Für die beschränkte Menge $K = [0,1]^n$ gilt $\mathbb{Z}^n(K) = \mathbb{R}^n$. Desweiteren gilt:

$$\{z \in \mathbb{Z}^n \mid z(K) \cap K \neq \emptyset\} = \{-1, 0, 1\}^n$$

Diese Menge hat offenbar 3^n Elemente, ist also endlich. Nach dem Milnor-Švarc-Lemma ist $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ damit quasi-isometrisch zu $\mathbb{Z}^n$. Analog ist $\mathbb{R}^m$ quasi-isometrisch zu $\mathbb{Z}^m$.
Da $\mathbb{Z}^n$ nicht quasi-isometrisch zu $\mathbb{Z}^m$ und quasi-Isometrie nach Aufgabe 1.2 eine Äquivalenzrelation ist, ist $\mathbb{R}^n$ nicht quasi-isometrisch zu $\mathbb{R}^m$.

***-Aufgabe**
Zeige:

a) Die Kommensurabilität zwischen Gruppen ist eine Äquivalenzrelation.

b) Sind G, H endlich erzeugte Gruppen, die zueinander kommensurabel sind, so sind G und H zueinander quasi-isometrisch.

c) Für welche $m, n \in \mathbb{N}$ sind F_n und F_m kommensurabel?

Lösung:

a) Wir müssen zeigen, dass Kommensurabilität reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
reflexiv: Sei G eine beliebige Gruppe. Da zueinander isomorphe Gruppen offenbar kommensurabel sind, ist G kommensurabel zu sich selbst.
symmetrisch: Da die Definition von Kommensurabilität symmetrisch ist, ist hier nichts zu zeigen.
transitiv: Sei G kommensurabel zu H und H kommensurabel zu K.
Zu zeigen: G ist kommensurabel zu K.
Da G kommensurabel zu H ist, existieren Untergruppen von endlichem

Index $G' \subseteq G$ und $H' \subseteq H$ und ein Isomorphismus $\varphi : H' \to G'$. Wegen der Kommensurabilität von H zu K gibt es Untergruppen von endlichem Index $H'' \subseteq H$ und $K' \subseteq K$ und einen Isomorphismus $\psi : H'' \to K'$.
Definiere $G'' := \varphi(H' \cap H'')$ und $K'' := \psi(H' \cap H'')$. Als Bilder von Untergruppen unter Gruppenhomomorphismen sind $G'' \subseteq G'$ und $K'' \subseteq K'$ Untergruppen. Wir zeigen nun, dass G'' und K'' isomorph zueinander sind und endlichen in Index in G bzw. K haben.
Da φ und ψ Isomorphismen sind, ist die Abbildung

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{G''} : G'' \to H' \cap H'' \to K''$$

ein Isomorphismus und es gilt $G'' \cong K''$.
Wegen $[H' : (H' \cap H'')] \leq [H : H''] < \infty$ hat $H' \cap H''$ endlichen Index in H'. Da φ ein Isomorphismus ist gilt zudem:

$$[G' : G''] = [\varphi(H') : \varphi(H' \cap H'')] = [H' : (H' \cap H'')] < \infty$$

Somit hat G'' endlichen Index in G'. Mit der Indexformel folgt:

$$[G : G''] = [G : G'] \cdot [G' : G''] < \infty$$

Also hat G'' endlichen Index in G. Analog sieht man $[K : K''] < \infty$. Folglich sind G und K kommensurabel und Kommensurabilität ist transitiv.

b) Wir beginnen mit folgender Beobachtung: Ist $\varphi : G \to H$ ein Isomorphismus und $S \subseteq G$ eine endliche Erzeugendenmenge, so induziert φ eine Isometrie $(G, d_S) \to (H, d_{\varphi(S)})$. Endlich erzeugte, zueinander isomorphe Gruppen sind damit quasi-isometrisch zueinander.
Seien G und H endlich erzeugte Gruppen, die kommensurabel zueinander sind. Dann gibt es Untergruppen von endlichem Index $G' \subseteq G, H' \subseteq H$ mit $G' \cong H'$. Nach Korollar 8 in Kapitel 1 der Vorlesung ist G' dann quasi-isometrisch zu G und H' zu H. Da quasi-Isometrie transitiv ist, ist G damit quasi-isometrisch zu H.

c) Wir zeigen, dass F_n und F_m genau dann kommensurabel sind, wenn $n = m = 1$ oder $n, m \geq 2$ gilt.
Ist $n = m = 1$, so sind F_n und F_m zueinander isomorph und insbesondere kommensurabel.
Ist $n = 1$ und $m \geq 2$, so hat $F_n \cong \mathbb{Z}$ eine lineare, F_m aber eine exponentielle Wachstumsfunktion. Folglich sind F_n und F_m nicht quasi-isometrisch und nach Teil b) nicht kommensurabel.
Alternativ: Da jede Untergruppe von endlichem Index in $\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, genügt es zu zeigen, dass F_m für $m \geq 2$ keine zyklische Untergruppe von endlichem Index enthält. Nach einem Satz in Gruppentheorie 1 ist eine Untergruppe $H \subseteq F_m$ von Index $[H : F_m] = n$ frei von Rang $h = n \cdot (m-1) + 1$. Für $m \geq 2$ ist dieser Ausdruck stets größer als 1.
Seien nun $n, m \geq 2$. Zu zeigen: F_n und F_m sind kommensurabel.
Da Kommensurabilität eine Äquivalenzrelation ist, genügt es zu zeigen, dass F_n kommensurabel zu F_2 ist.
Nach Lemma 9 aus Kapitel 1 der Vorlesung ist F_n isomorph zu einer Untergruppe $H \subseteq F_2$ von endlichem Index in F_2. Somit ist F_n kommensurabel zu F_2.