3. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“
Musterlösung

SoSe 2016
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 3.1
Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine quasi-Isometrie. Sei $h : X \to Y$ eine Abbildung, die endlichen Abstand zu f hat. Zeige: h ist eine quasi-Isometrie.

Lösung: Da h endlichen Abstand zu f hat, existiert eine Konstante $D \geq 0$ mit $d_Y(h(x), f(x)) \leq D$ für alle $x \in X$.
Da f eine quasi-Isometrie ist, ist f eine (L_1, c_1)-grobe Lipschitz-Abbildung und es gibt eine (L_2, c_2)-grobe Lipschitz-Abbildung $g : Y \to X$ sowie Konstanten $R_1, R_2 \geq 0$ mit $d_X(g \circ f(x), x) \leq R_1$ und $d_Y(f \circ g(y), y) \leq R_2$ für alle $x \in X, y \in Y$.
Wir zeigen zunächst, dass h grob Lipschitz ist. Seien $x, x' \in X$ beliebig.
Dann gilt nach der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d_Y(h(x), h(x')) &\leq d_Y(h(x), f(x)) + d_Y(f(x), f(x')) + d_Y(f(x'), h(x')) \\ &\leq D + L_1 \cdot d_X(x, x') + c_1 + D \\ &= L_1 \cdot d_X(x, x') + (c_1 + 2D) \end{aligned}$$

Nach Definition ist h damit $(L_1, c_1 + 2D)$-grob Lipschitz.
Es bleibt noch zu zeigen, dass es eine grobe Lipschitz-Abbildung $k : Y \to X$ gibt, sodass $k \circ h$ und $h \circ k$ jeweils endlichen Abstand zu id_X bzw. id_Y haben.
Wir beweisen, dass dies für $k := g$ gilt. Seien dafür $x \in X, y \in Y$ beliebig.
Nach der Dreiecksungleichung gilt:

$$\begin{aligned} d_X(g \circ h(x), x) &\leq d_X(g \circ h(x), g \circ f(x)) + d_X(g \circ f(x), x) \\ &\leq L_2 \cdot d_Y(h(x), f(x)) + c_2 + R_1 \\ &\leq L_2 \cdot D + c_2 + R_1 < \infty \\ d_Y(h \circ g(y), y) &\leq d_Y(h \circ g(y), f \circ g(y)) + d_Y(f \circ g(y), y) \\ &\leq D + R_2 < \infty \end{aligned}$$

Somit haben $g \circ h$ und $h \circ g$ endlichen Abstand zu id_X bzw. id_Y. h ist damit eine quasi-Isometrie.

Aufgabe 3.2
Sei G eine Gruppe und $A, B \subseteq G$ Untergruppen. Zeige:

a) Sind A und B charakteristische Untergruppen, so ist auch $A \cap B$ eine charakteristische Untergruppe von G.

b) Gilt $A \subseteq B$, A ist charakteristisch in B und B charakteristisch in G, so ist A charakteristisch in G.

c) Ist A eine charakteristische Untergruppe von G mit $A \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, so gilt $A \subseteq Z(G)$.

d) Gebe ein Beispiel für eine Gruppe G an, die einen Normalteiler N enthält, der nicht charakteristisch in G ist.

Lösung:

a) Seien A, B charakteristische Untergruppen von G. Sei $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ ein beliebiger Automorphismus von G. Zu zeigen: $\varphi(A \cap B) = A \cap B$
Da A und B charakteristisch in G sind, gilt $\varphi(A) = A$ und $\varphi(B) = B$. Weiter ist φ als Automorphismus von G injektiv und es folgt:

$$\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B) = A \cap B$$

b) Sei $A \subseteq B$ charakteristisch in B und B eine charakteristische Untergruppe in G. Sei $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ beliebig.
Da B eine charakteristische Untergruppe ist, gilt $\varphi(B) = B$. Nun ist die Einschränkung $\varphi|_B$ ein Automorphismus von B. Da A charakteristisch in B ist, erhalten wir:

$$\varphi(A) = \varphi|_B(A) = A$$

Somit ist A eine charakteristische Untergruppe von G.

c) Sei A eine charakteristische Untergruppe von G mit $A \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Wir zeigen $A \subseteq Z(G)$, indem wir beweisen, dass die Wirkung von G auf A durch Konjugation trivial ist.
Sei $g \in G$ beliebig. Dann definiert die Konjugation mit g einen Automorphismus $c_g : G \to G, x \mapsto gxg^{-1}$. Da A eine charakteristische Untergruppe von G ist, gilt $c_g(A) = A$ und $c_g|_A$ ist ein Automorphismus von A. Wegen $A \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist die Identität id_A der einzige Automorphismus von A. (Beachte, dass jeder Automorphismus 1 auf 1 und somit auch das eindeutige Element $a \in A \setminus \{1\}$ auf sich selbst abbildet.)
Daher gilt $c_g|_A = \mathrm{id}_A$. Folglich ist die Konjugationswirkung von G auf A trivial und es gilt $A \subseteq Z(G)$.

d) Betrachte die Gruppe $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Da G abelsch ist, ist jede Untergruppe von G ein Normalteiler und es genügt zu beweisen, dass die Untergruppe $N := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{0\}$ nicht charakteristisch in G ist.
Man sieht leicht, dass die Abbildung $\varphi : G \to G, (x, y) \mapsto (y, x)$ ein selbstinverser Gruppenautomorphismus von G ist. Desweiteren gilt:

$$\varphi(N) = \varphi(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{0\}) = \{0\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq N$$

Wegen $\varphi(N) \neq N$ ist N keine charakteristische Untergruppe von G.

Aufgabe 3.3
Sei G eine nilpotente Gruppe und $\{1\} \neq N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Zeige:

a) Es gilt $N \cap Z(G) \neq \{1\}$.

b) Ist N ein minimaler echter Normalteiler von G (d.h. es gibt keinen Normalteiler $N' \trianglelefteq G$ mit $\{1\} \neq N' \subsetneq N$), so gilt $N \subseteq Z(G)$.

Lösung:

a) Nach Satz 5 aus Kapitel 2 der Vorlesung gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $Z_m G = G$. Daher existiert $k \in \mathbb{N}$ minimal mit $N \cap Z_k G \neq \{1\}$. Aufgrund der Minimalität von k gilt insbesondere $N \cap Z_{k-1}G = \{1\}$.
Betrachte die Untergruppe $[N \cap Z_k G, G] = \langle [x, y] \mid x \in N \cap Z_k G, y \in G \rangle$.
Da N normal in G ist, gilt $[N \cap Z_k G, G] \subseteq N$. Andererseits erhalten wir wegen $Z_k G = \pi^{-1}(Z(G/Z_{k-1}G))$:

$$[N \cap Z_k G, G] \subseteq [Z_k G, G] \subseteq Z_{k-1}G$$

Insgesamt folgt also $[N \cap Z_k G, G] \subseteq N \cap Z_{k-1}G = \{1\}$.
Sei $n \in N \cap Z_k G, n \neq 1$. Wegen $[N \cap Z_k G, G] = \{1\}$ kommutiert n mit allen Elementen aus G, d.h. es gilt $n \in N \cap Z(G)$.

b) Sei N ein minimaler echter Normalteiler in G. Da N und $Z(G)$ Normalteiler in G sind, ist ihr Durchschnitt $N \cap Z(G)$ normal in G.
Nach Teil *a)* gilt $N \cap Z(G) \neq \{1\}$. Wegen der Minimalität von N folgt daher schon $N \cap Z(G) = N$, d.h. $N \subseteq Z(G)$.

Aufgabe 3.4

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Gruppe $\mathrm{UT}(n, R)$ durch

$$\mathrm{UT}(n, R) := \{(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \mid a_{ii} = 1 \text{ und } a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j\} \subseteq \mathrm{SL}(n, R)$$

als Untergruppe der Matrizengruppe $\mathrm{SL}(n, R)$. Nach Definition sind die Elemente von $\mathrm{UT}(n, R)$ genau die $(n \times n)$-Matrizen über R von der Form $\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
wobei die $*$ beliebige Einträge aus R bezeichnen.
Zeige, dass $\mathrm{UT}(n, R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nilpotent ist und bestimme die Nilpotenzklasse von $\mathrm{UT}(n, \mathbb{Z})$ in Abhängigkeit von n.

Lösung: Wir zeigen zunächst per Induktion nach n, dass $\mathrm{UT}(n, R)$ nilpotent mit Nilpotenzklasse $\leq n - 1$ ist.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $\mathrm{UT}(1, R) = \{1\}$, also ist $\mathrm{UT}(1, R)$ nilpotent von Klasse 0.
Für $n = 2$ gilt $\mathrm{UT}(2, R) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid r \in R \right\}$ und $\mathrm{UT}(2, R)$ ist isomorph zu der kommutativen Gruppe $(R, +)$. Damit ist $\mathrm{UT}(2, R)$ nilpotent von Klasse 1.
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Sei für ein $n \in \mathbb{N}$ die Gruppe $\mathrm{UT}(n, R)$ nilpotent von Klasse $\leq n-1$. Wir wollen zeigen, dass $L_n \mathrm{UT}(n + 1, R)$ trivial ist. Nach Definition gilt

$$L_n \mathrm{UT}(n + 1, R) = [\mathrm{UT}(n + 1, R), L_{n-1}\mathrm{UT}(n + 1, R)],$$

d.h. $L_n \mathrm{UT}(n + 1, R)$ wird von den Elementen der Form $[g, x]$ mit $g \in G$ und $x \in L_{n-1}\mathrm{UT}(n + 1, R)$ erzeugt. Es genügt daher zu zeigen, dass alle solchen

Kommutatoren trivial sind. Sei $y = [g,x] = gxg^{-1}x^{-1}$ mit $g \in G$ und $x \in L_{n-1}\mathrm{UT}(n{+}1,R)$. Dann gibt es eine Matrix $X \in \mathrm{UT}(n,R)$ mit $x = \begin{pmatrix} X & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aus der Multiplikation von Blockmatrizen ergibt sich $X \in L_{n-1}\mathrm{UT}(n,R)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathrm{UT}(n,R)$ von Nilpotenzklasse $\leq n-1$, d.h. es gilt $L_{n-1}\mathrm{UT}(n,R) = \{1\}$ und somit $X = 1$. Andererseits können wir auch $x = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & X' \end{pmatrix}$ für eine geeignete Matrix $X' \in \mathrm{UT}(n,R)$ schreiben. Genauso wie oben sehen wir $X' = 1$. Damit ist x von der Form

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & r \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für ein $r \in R$. Schreibe nun $g = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ für geeignete $g_{ij} \in R$ mit $g_{ii} = 1$ und $g_{ij} = 0$ für $i > j$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g \cdot x &= \begin{pmatrix} 1 & g_{12} & \dots & g_{1n} & g_{1(n+1)} \\ 0 & 1 & \ddots & & g_{2(n+1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & g_{n(n+1)} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & r \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & g_{12} & \dots & g_{1n} & g_{1(n+1)} + r \\ 0 & 1 & \ddots & & g_{2(n+1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & g_{n(n+1)} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = x \cdot g \end{aligned}$$

Da g also mit x kommutiert, erhalten wir $y = [g,x] = 1$. Da y ein beliebiger Erzeuger von $L_n\mathrm{UT}(n+1,R)$ war, folgt $L_n\mathrm{UT}(n+1,R) = \{1\}$.
Somit ist $\mathrm{UT}(n+1,R)$ nilpotent und hat Nilpotenzklasse $\leq n$.
Der Induktionsschritt ist damit gezeigt und $\mathrm{UT}(n,R)$ ist nilpotent von Klasse $\leq n-1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir behaupten, dass $\mathrm{UT}(n,\mathbb{Z})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ genau die Nilpotenzklasse $n-1$ hat. Aus dem obigen Induktionsbeweis folgt, dass die Nilpotenzklassse von $\mathrm{UT}(n,\mathbb{Z})$ höchstens $n-1$ beträgt. Es genügt somit ein nicht-triviales Element in $L_{n-2}\mathrm{UT}(n,\mathbb{Z})$ zu finden und dadurch nachzuweisen, dass die Nilpotenzklasse mindestens $n-1$ ist.

Wir zeigen dafür per Induktion, dass für $n \geq 2$ die $(n \times n)$- Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in $L_{n-2}\mathrm{UT}(n, \mathbb{Z})$ liegt und somit $L_{n-2}\mathrm{UT}(n, \mathbb{Z}) \neq \{1\}$ gilt.
Induktionsanfang: Für $n = 2$ gilt $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{UT}(2, \mathbb{Z}) = L_0\mathrm{UT}(2, \mathbb{Z})$ und es ist nichts zu zeigen. Für $n = 3$ gilt:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_3 \end{aligned}$$

Somit gilt $A_3 \in [\mathrm{UT}(3, \mathbb{Z}), \mathrm{UT}(3, \mathbb{Z})] = L_1\mathrm{UT}(3, \mathbb{Z})$.
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Sei $A_n \in L_{n-2}\mathrm{UT}(n, \mathbb{Z})$ für ein beliebiges $n \geq 2$. Dann gilt für $n + 1$:
Aus der Multiplikation von Blockmatrizen ergibt sich, dass die $(n+1) \times (n+1)$-Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in $L_{n-2}\mathrm{UT}(n + 1, \mathbb{Z})$ liegt. (Beachte, dass X die Blockgestalt $X = \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

besitzt.) Sei weiter die Matrix $Y \in \mathrm{UT}(n+1, \mathbb{Z})$ definiert als

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine ähnliche Rechnung wie im Fall $n = 3$ zeigt, dass $[X, Y] = A_{n+1}$ gilt.
Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} A_{n+1} = [X, Y] \in [L_{n-2}\mathrm{UT}(n+1, \mathbb{Z}), \mathrm{UT}(n+1, \mathbb{Z})] &= L_{n-1}\mathrm{UT}(n+1, \mathbb{Z}) \\ &= L_{(n+1)-2}\mathrm{UT}(n+1, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und $\mathrm{UT}(n, \mathbb{Z})$ hat Nilpotenzklasse $n-1$.

***-Aufgabe**

Sei G eine nilpotente Gruppe und $A \trianglelefteq G$ ein maximaler abelscher Normalteiler in G (d.h. es existiert kein abelscher Normalteiler von G, in dem A echt enthalten ist). Zeige, dass $C_G(A) = A$ gilt, wobei

$$C_G(A) := \{c \in G \mid ac = ca \text{ für alle } a \in A\}$$

der *Zentralisator* von A in G ist.

Lösung: Wir argumentieren per Widerspruch:
Angenommen, es sei $A \neq C := C_G(A)$. Da A abelsch ist, gilt $A \subseteq C$. Somit ist $A \subsetneq C$ eine echte Untergruppe.
Wir beweisen, dass C normal in G ist. Seien $c \in C, g \in G$ und $a \in A$ beliebig. Wegen $A \trianglelefteq G$ gilt dann $g^{-1}ag \in A$ und folglich $c(g^{-1}ag) = (g^{-1}ag)c$.
Damit erhalten wir:

$$(gcg^{-1})a = gc(g^{-1}ag)g^{-1} = g(g^{-1}ag)cg^{-1} = a(gcg^{-1})$$

Da $a \in A$ beliebig war, gilt $gcg^{-1} \in C$. Weil $c \in C$ und $g \in G$ beliebig waren, ist C ein Normalteiler in G.
Da C normal in G ist, ist C/A normal in G/A und wegen $A \subsetneq C$ gilt $C/A \neq \{1\}$. Nach Aufgabe 3.3 a) gibt es somit $x \in C$ mit $xA \in C/A \cap Z(G/A)$ und $x \notin A$. Betrachte die von x und A erzeugte Untergruppe $A' := \langle \{x\} \cup A \rangle \subseteq G$.
Aus $x \in C$ folgt, dass A' abelsch ist. Ferner impliziert $x \notin A$, dass $A \subsetneq A'$ eine echte Untergruppe ist. Wir zeigen nun, dass A' ein Normalteiler von G ist.
Sei $g \in G$ beliebig. Da A normal in G ist, genügt es zu nachzuweisen, dass $gxg^{-1} \in A'$ gilt. Aus $xA \in Z(G/A)$ erhalten wir:

$$gxg^{-1} \in gxg^{-1}A = xA \subseteq \langle \{x\} \cup A \rangle = A'$$

Insgesamt ist A' ein abelscher Normalteiler von G, der A echt enthält. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von A. $\lightning$
Die Annahme $A \neq C_G(A)$ war demnach falsch und A stimmt mit dem eigenen Zentralisator $C_G(A)$ überein.