5. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“
Musterlösung

SoSe 2016 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 5.1
Sei G eine Gruppe. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

i) G ist auflösbar.

ii) G hat eine Normalreihe mit abelschen Faktoren.

Lösung: „*i)* $\Rightarrow$ *ii)*“ Sei G auflösbar. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $D^nG = \{1\}$.
Setze $G_i := D^iG$ für $i = 0, \dots, n$. Wir zeigen nun, dass

$$\{1\} = D^nG = G_n \subseteq G_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq G_1 = DG \subseteq G_0 = G$$

eine Normalreihe mit abelschen Faktoren ist.
Aus Gruppentheorie 1 wissen wir, dass $DG \trianglelefteq G$ gilt und die Faktorgruppe $G/DG = G^{\mathrm{ab}}$ abelsch ist. Wegen $G_{i+1} = D^{i+1}G = D(D^iG) = DG_i$ ist G_{i+1} normal in G_i und G_i/G_{i+1} abelsch für $i = 0, \dots n-1$. Somit bilden die G_i eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren.
„*ii)* $\Rightarrow$ *i)*“ Sei $\{1\} = G_m \subseteq G_{m-1} \subseteq \ldots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$ eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren. Wir zeigen nun per Induktion nach k, dass $D^kG \subseteq G_k$ gilt für $k = 0, \dots, m$.
Induktionsanfang: Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $k = 1$ gilt $D^1G = DG$. Da DG von den Kommutatoren $[g, h]$ mit $g, h \in G$ erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass G_1 alle Kommutatoren enthält. Seien $g, h \in G$ beliebig. Da $G/G_1 = G_0/G_1$ abelsch ist, kommutieren gG_1 und hG_1 in der Faktorgruppe miteinander, d.h. es gilt $[g, h]G_1 = 1G_1 = G_1$, also $[g, h] \in G_1$.
Induktionsschritt: $k \to k + 1$
Sei $D^kG \subseteq G_k$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt Folgendes für $k + 1$:
Nach Definition ist $D^{k+1}G = D(D^kG)$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt daher $D^{k+1}G = D(D^kG) \subseteq DG_k$. DG_k wird erzeugt von Kommutatoren der Form $[g, h]$ mit $g, h \in G_k$. Nun ist G_k/G_{k+1} abelsch und wir sehen genauso wie im Fall $k = 1$, dass $[g, h] \in G_{k+1}$ gilt. Da eine Erzeugermenge von DG_k in der Untergruppe G_{k+1} enthalten ist, liegt $D^{k+1}G \subseteq DG_k$ in G_{k+1}.
Wegen $D^mG \subseteq G_m = \{1\}$ gilt $D^mG = \{1\}$ und G ist auflösbar.

Aufgabe 5.2
Betrachte die Gruppe $G = \mathrm{Alt}(4)$ der alternierenden Permutationen auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$. Zeige:

a) Alt(4) ist auflösbar und polyzyklisch.

b) Alt(4) ist nicht nilpotent und nicht überauflösbar.

Lösung:

a) Wir zeigen, dass Alt(4) polyzyklisch ist, indem wir eine Normalreihe von Alt(4) mit zyklischen Faktoren konstruieren.
Sei $H = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq \mathrm{Alt}(4)$. Man rechnet leicht nach, dass H eine Untergruppe von Alt(4) ist und $H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt. Desweiteren ist H sogar ein Normalteiler in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dies sieht man auf folgende Weise:
Wegen $\#\mathrm{Alt}(4) = \frac{4!}{2} = \frac{24}{2} = 12, \#H = 4$ und $\mathrm{ord}(123) = 3$ gilt nach dem Satz von Lagrange $\langle H \cup \{(123)\}\rangle = \mathrm{Alt}(4)$. Für $H \trianglelefteq \mathrm{Alt}(4)$ genügt es also zu zeigen, dass das Element (123) die Untergruppe H normalisiert. Es gilt:

$$(123)(12)(34)(123)^{-1} = (123)(12)(34)(132) = (14)(23) \in H$$
$$(123)(13)(24)(123)^{-1} = (123)(13)(24)(132) = (12)(34) \in H$$

Da (12)(34) und (13)(24) die Untergruppe H erzeugen, wird H von (123) normalisiert und es gilt $H \trianglelefteq \mathrm{Alt}(4)$.
Nach Lagrange gilt $\#\mathrm{Alt}(4)/H = \frac{\#\mathrm{Alt}(4)}{\#H} = \frac{12}{4} = 3$ und $\mathrm{Alt}(4)/H$ ist somit zyklisch.
Betrachte die Untergruppe $K = \{\mathrm{id}, (12)(34)\} \subseteq H$. Es gilt $K \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und K ist normal in H, da H abelsch ist. H/K hat Ordnung 2 und ist damit auch zyklisch.
Setze $G_3 = \{1\}, G_2 = K, G_1 = H$ und $G_0 = G = \mathrm{Alt}(4)$. Dann ist $\{1\} = G_3 \subseteq G_2 \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$ eine Normalreihe von $G = \mathrm{Alt}(4)$ mit zyklischen Faktoren. Alt(4) ist somit nach Definition polyzyklisch und insbesondere auflösbar.

b) Um zu beweisen, dass $G = \mathrm{Alt}(4)$ nicht überauflösbar ist, genügt es zu zeigen, dass G keinen nicht-trivialen, zyklischen Normalteiler enthält.
Hierfür genügt es wiederum zu sehen, dass jedes $\sigma \in \mathrm{Alt}(4), \sigma \neq \mathrm{id}$ zu einem Element $\tau \notin \langle\sigma\rangle$ konjugiert ist. Jedes solche Element $\sigma \in \mathrm{Alt}(4) \setminus \{\mathrm{id}\}$ ist ein 3-Zykel oder ein Produkt von zwei Transpositionen mit disjunkten Trägern. In beiden Fällen führen wir eine exemplarische Rechnung durch. Für $\sigma_1 = (123)$ gilt:

$$(234)(123)(234)^{-1} = (234)(123)(243) = (134)$$

Somit ist σ_1 konjugiert zu $\tau_1 = (134) \notin \langle\sigma_1\rangle$. Weiter ist $\sigma_2 = (12)(34)$ wie in a) gesehen konjugiert zu $\tau_2 = (14)(23) \notin \langle\sigma_2\rangle$.
Da $G = \mathrm{Alt}(4)$ keinen nicht-trivialen zyklischen Normalteiler enthält, ist Alt(4) nicht überauflösbar. Da endlich erzeugte, nilpotente Gruppen nach Satz 13 aus Kapitel 2 der Vorlesung überauflösbar sind, ist Alt(4) damit auch nicht nilpotent.

Aufgabe 5.3
Sei G eine endliche, auflösbare Gruppe. Zeige: G ist polyzyklisch.

Lösung: Da G auflösbar ist, existiert nach Aufgabe 5.1 eine Normalreihe

$$\{1\} = G_m \subseteq G_{m-1} \subseteq \ldots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

mit abelschen Faktoren. Wir müssen nun zeigen, dass G eine Normalreihe mit zyklichen Faktoren besitzt. Dazu verfeinern wir die obige Normalreihe wie folgt: Da G endlich ist, ist $G_0/G_1 = G/G_1$ eine endliche, abelsche Gruppe. Nach dem Struktursatz für endlich erzeugte, abelsche Gruppen gibt es somit $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $n_i \geq 2$ mit $G_0/G_1 \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$. Definiere nun für $i = 0, \ldots, k-1$ die Untergruppe

$$H_i := \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_{k-i}\mathbb{Z} \subseteq G_0/G_1$$

und setze $H_k = \{0\} \subseteq G_0/G_1$. Sei $\pi : G_0 \to G_0/G_1$ die kanonische Projektion. Definiere Untergruppen $G'_i := \pi^{-1}(H_i) \subseteq G_0 = G$ für $i = 0, \ldots, k$.
Nach Konstruktion gilt $G'_0 = G_0 = G$ und $G'_k = \pi^{-1}(\{0\}) = G_1$. Da G_0/G_1 abelsch ist, ist H_{i+1} normal in H_i für $i = 0, \ldots, k-1$. Somit gilt auch $G'_{i+1} \trianglelefteq G'_i$ für $i = 0, \ldots, k-1$. Betrachte die Komposition $G'_i \to H_i \to H_i/H_{i+1}$, wobei die erste Abbildung $\pi|_{G'_i}$ und die zweite die kanonische Projektion auf H_i/H_{i+1} sei. Als Komposition von Epimorphismen ist diese Abbildung surjektiv und der Kern ist genau $\pi^{-1}(H_{i+1}) = G'_{i+1}$. Nach dem Homomorphiesatz gilt demnach:

$$\begin{aligned} G'_i/G'_{i+1} \cong H_i/H_{i+1} &\cong (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_{k-i}\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_{k-i-1}\mathbb{Z}) \\ &\cong \mathbb{Z}/n_{k-i}\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Die Faktorgruppe G'_i/G'_{i+1} ist also zyklisch. Nun ist die Verfeinerung

$$\{1\} = G_m \subseteq G_{m-1} \subseteq \ldots \subseteq G_1 = G'_k \subseteq G'_{k-1} \subseteq \ldots \subseteq G'_1 \subseteq G'_0 = G_0 = G$$

eine Normalreihe von G, in welcher die ersten k Faktoren zyklisch sind.
Das iterierte Anwenden dieser Konstruktion auf die Faktorgruppen G_i/G_{i+1} für $i \geq 1$ liefert schließlich eine Normalreihe von G, in der alle Faktorgruppen zyklisch sind und G ist nach Definition polyzyklisch.

Aufgabe 5.4
Sei p eine Primzahl und G eine nilpotente Gruppe, die ein Element $g \in G$ von Ordnung p enthält. Zeige, dass in $Z(G)$ ein Element der Ordnung p existiert.

Lösung: Wir zeigen zunächst folgende Hilfsaussage für Kommutatoren:
Für alle $x, y \in G$ und $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ gilt

$$[x^m, y] = x^{m-1}[x,y]x^{-(m-1)} \cdot x^{m-2}[x,y]x^{-(m-2)} \cdot \ldots \cdot x[x,y]x^{-1} \cdot [x,y].$$

Seien $x, y \in G$ beliebig. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach m:
Induktionsanfang: Für $m = 1$ ist nichts zu zeigen. Für $m = 2$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} [x^2, y] &= x^2yx^{-2}y^{-1} = xxyx^{-1} \cdot 1 \cdot x^{-1}y^{-1} \\ &= xxyx^{-1}(y^{-1}x^{-1}xy)x^{-1}y^{-1} \\ &= x(xyx^{-1}y^{-1})x^{-1} \cdot xyx^{-1}y^{-1} \\ &= x[x,y]x^{-1} \cdot [x,y] \end{aligned}$$

Induktionsschritt: Sei die Aussage richtig für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$.

Dann gilt für $m+1$:

$$\begin{aligned}[x^{m+1},y] &= x^{m+1}yx^{-(m+1)}y^{-1} = x^m xyx^{-1}\cdot 1\cdot x^{-m}y^{-1}\\ &= x^m xyx^{-1}(y^{-1}x^{-m}x^m y)x^{-m}y^{-1}\\ &= x^m(xyx^{-1}y^{-1})x^{-m}\cdot x^m yx^{-m}y^{-1}\\ &= x^m[x,y]x^{-m}\cdot[x^m,y]\end{aligned}$$

Nun folgt die Behauptung für $m+1$ direkt aus der Induktionsannahme.
Zum eigentlichen Beweis: Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach der Nilpotenzklasse m von G.
Induktionsanfang: Für $m=1$ ist G abelsch, d.h. es gilt $G=Z(G)$ und es ist nichts zu zeigen.
Induktionsschritt: $m\to m+1$
Sei die Aussage richtig für alle nilpotenten Gruppen der Nilpotenzklasse m für ein $m\in\mathbb{N}$. Sei G nun von Nilpotenzklasse $m+1$.
Ohne Einschränkung können wir $g\notin Z(G)$ annehmen. Dann ist das Element $gZ(G)\in G/Z(G)$ ein Element der Ordnung p.
Nach dem Korollar zu Satz 5 in Kapitel 2 der Vorlesung hat die Gruppe $G/Z(G)$ die Nilpotenzklasse m. Nach Induktionsvoraussetzung enthält das Zentrum $Z(G/Z(G))$ daher ein Element $hZ(G)$ mit $\mathrm{ord}(hZ(G))=p$.
Insbesondere gilt $h^p\in Z(G)$ und $h\notin Z(G)$. Wegen $h\notin Z(G)$ existiert $g'\in G$ mit $[h,g']\neq 1$. Da $hZ(G)$ in $G/Z(G)$ zentral ist, folgt weiter $[h,g']\in Z(G)$. Setze nun $c:=[h,g']\in Z(G)$.
Wegen $h^p\in Z(G)$ vertauscht h^p mit g'. Zudem impliziert $c\in Z(G)$, dass $h^jch^{-j}=c$ für alle $j=0,\dots,p-1$ gilt. Fügen wir diese beiden Aussagen zusammen, erhalten wir mit der Hilfsbehauptung im Fall $x=h, y=g'$ und $m=p$:

$$\begin{aligned}1=[h^p,g'] &= h^{p-1}[h,g']h^{-(p-1)}\cdot h^{p-2}[h,g']h^{-(p-2)}\cdot\ldots\cdot h[h,g']h^{-1}\cdot[h,g']\\ &= h^{p-1}ch^{-(p-1)}\cdot h^{p-2}ch^{-(p-2)}\cdot\ldots\cdot hch^{-1}\cdot c\\ &= c\cdot\ldots\cdot c = c^p\end{aligned}$$

Wegen $c=[h,g']\neq 1$ hat c die Ordnung $\mathrm{ord}(c)=p$. Damit enthält das Zentrum $Z(G)$ ein Element der Ordnung p.

***-Aufgabe**
Welche der folgenden Gruppen sind polyzyklisch?

a) die Quaternionengruppe Q (wie in Aufgabe 4.3 definiert)

b) $\mathrm{Sym}(5)$

c) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

d) F_2, die freie Gruppe von Rang 2

Lösung:

a) Nach Aufgabe 4.3 ist Q nilpotent und endlich, insbesondere endlich erzeugt. Damit ist Q nach Satz 13 aus Kapitel 2 der Vorlesung polyzyklisch.

b) Der einzige Normalteiler in Sym(5) ist die Untergruppe Alt(5). Alt(5) enthält keine nicht-trivialen Normalteiler und ist nicht zyklisch. Somit ist Sym(5) nicht polyzyklisch.

c) In der Lösung zu Aufgabe 2.4a) haben wir gesehen, dass $\mathbb{Z}$ als Normalteiler von Index 2 in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ enthalten ist. Die Faktorgruppe hat damit Ordnung 2 und ist zyklisch. Folglich ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nach Definition polyzyklisch.

d) In Gruppentheorie 1 haben wir gesehen, dass die Kommutatorgruppe einer freien Gruppe von Rang ≥ 2 frei von unendlichem Rang ist. Insbesondere gibt es also kein $n \in \mathbb{N}$ mit $D^n F_2 = \{1\}$, d.h. F_2 ist nicht auflösbar. Da jede polyzyklische Gruppe auflösbar ist, ist F_2 somit nicht polyzyklisch.