8. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“
Musterlösung

SoSe 2016
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 8.1
Seien R, S Ringe, $x \in R^*$ eine Einheit und $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. (Anmerkung: f bildet damit 1_R auf 1_S ab.) Beweise oder widerlege:

a) $f(x)$ ist eine Einheit in S und die Einschränkung $f|_{R^*} : R^* \to S^*$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

b) Ist f ein surjektiver Ringhomomorphismus, so induziert f einen surjektiven Homomorphismus zwischen den Einheitengruppen.

Lösung:

a) Die Aussage trifft zu. Da $x \in R^*$ ist, gibt es $y \in R$ mit $x \cdot y = 1_R = y \cdot x$. Wir erhalten:

$$f(x) \cdot f(y) = f(1_R) = 1_S = f(y \cdot x) = f(y) \cdot f(x)$$

Somit ist $f(y)$ invers zu $f(x)$ und es gilt $f(x) \in S^*$.
Insbesondere ist die Einschränkung $f|_{R^*} : R^* \to S^*$ wohldefiniert. Da f als Ringhomomorphismus multiplikativ ist, ist $f|_{R^*}$ ein Gruppenhomomorphismus.

b) Die Aussage ist falsch. Betrachte als Gegenbeispiel die Ringe $R = \mathbb{Z}$ und $S = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, z \mapsto z+5\mathbb{Z}$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus. Aber die Einheitengruppe $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$ bildet nicht surjektiv auf $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* = \{1 + 5\mathbb{Z}, 2 + 5\mathbb{Z}, 3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}$ ab.

Aufgabe 8.2
Bestimme, welche der folgenden komplexen Zahlen ganz über $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ sind.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\sqrt[3]{13}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i$

d) $\frac{1}{4} + \sqrt{2}$

Lösung:

a) $\frac{1}{2}$ ist nicht ganz über $\mathbb{Z}$. Wir zeigen dies per Widerspruch. Angenommen, $p \in \mathbb{Z}[X]$ sei ein normiertes Polynom mit $p(\frac{1}{2}) = 0$. Seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ mit $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$. Dann gilt:

$$0 = p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n} + a_{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2}X + a_0$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit 2^{n-1} und erhalten:

$$0 = \frac{1}{2} + a_{n-1} + 2a_{n-2} + \dots + 2^{n-2}a_1 + 2^{n-1}a_0$$

Also gilt $\frac{1}{2} = -(a_{n-1} + 2a_{n-2} + \dots + 2^{n-2}a_1 + 2^{n-1}a_0) \in \mathbb{Z}$. ↯
Dies ist ein Widerspruch, da $\frac{1}{2}$ nicht in $\mathbb{Z}$ liegt.
Somit war die Annahme, $\frac{1}{2}$ sei die Nullstelle eines normierten Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten, falsch und $\frac{1}{2}$ ist nicht ganz über $\mathbb{Z}$.

b) $\sqrt[3]{13}$ ist ganz über $\mathbb{Z}$. Betrachte das normierte Polynom $p = X^3 - 13 \in \mathbb{Z}[X]$. Es gilt offenbar $p(\sqrt[3]{13}) = 0$.

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i$ ist nicht ganz über $\mathbb{Z}$. Per Widerspruch: Angenommen, $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i$ sei ganz über $\mathbb{Z}$. Da die komplexen Zahlen, die ganz über $\mathbb{Z}$ sind, nach Aufgabe 7.4 einen Teilring bilden, ist dann auch $(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i)^2 = -\frac{1}{2}$ ganz und somit auch $\frac{1}{2}$ ganz über $\mathbb{Z}$. Dies steht im Widerspruch zu Teil a). ↯

d) $\frac{1}{4} + \sqrt{2}$ ist nicht ganz über $\mathbb{Z}$. Per Widerspruch: Angenommen, $\frac{1}{4} + \sqrt{2}$ sei ganz über $\mathbb{Z}$. Da die über $\mathbb{Z}$ ganzen Zahlen in $\mathbb{C}$ einen Teilring bilden und $\sqrt{2}$ als Nullstelle des Polynoms $X^2 - 2$ offenbar ganz über $\mathbb{Z}$ ist, ist dann auch $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \sqrt{2} - \sqrt{2}$ ganz über $\mathbb{Z}$. Dann ist aber auch $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ganz über $\mathbb{Z}$. ↯

Aufgabe 8.3
Sei A ein kommutativer Ring. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Jedes Ideal $I \trianglelefteq A$ ist endlich erzeugt.

ii) Jede aufsteigende Kette von Idealen $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$ in A wird stationär, d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $I_k = I_N$ für alle $k \geq N$.

iii) Zu jeder aufsteigenden Kette von Idealen $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$ in A gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $I_k = I_{k+1}$.

Lösung:

$i) \Rightarrow ii)$ Sei $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$ eine beliebige aufsteigende Kette von Idealen in A. Definiere $J := \bigcup_{j \geq 0} I_j$. Wir zeigen, dass J ein Ideal in A ist.
Wegen $0 \in I_0$ gilt offenbar $0 \in J$. Seien $x, y \in J$ beliebig. Dann gibt es $j, k \in \mathbb{N}$ mit $x \in I_j, y \in I_k$. Sei ohne Einschränkung $j \leq k$. Dann gilt $x \in I_j \subseteq I_k$. Da I_k als Ideal abgeschlossen unter Addition ist, folgt

$x+y \in I_k \subseteq J$. Somit ist J abgeschlossen bzgl. $+$. Sei weiter $a \in A$ beliebig. Da I_j ein Ideal ist, folgt $a \cdot x \in I_j \subseteq J$. Insgesamt ist $J \trianglelefteq A$ ein Ideal. Nach Voraussetzung ist J endlich erzeugt. Sei $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq J$ eine endliche Erzeugermenge von J. Wegen $J = \bigcup_{j \geq 0} I_j$ gibt es $j_k \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in I_{j_k}$ für $k = 1, \ldots, n$. Sei $N := \max\{j_1, \ldots, j_n\}$.
Da die I_j eine aufsteigende Kette bilden, gilt $x_j \in I_N$ für $j = 1, \ldots, n$. Da die x_i das Ideal J erzeugen, folgt $J \subseteq I_N$ und somit $J = I_N$. Für alle $k \geq N$ gilt weiter $I_N \subseteq I_k \subseteq J = I_N$, also $I_k = I_N$ und die Kette $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots$ wird stationär.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Sei $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots$ eine beliebige aufsteigende Kette von Idealen in A. Nach Voraussetzung wird diese Kette stationär und es gibt insbesondere einen Index $k \in \mathbb{N}$ mit $I_k = I_{k+1}$.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Wir zeigen diese Implikation durch Kontraposition: Sei $I \trianglelefteq A$ ein Ideal, das nicht endlich erzeugt ist. Wir definieren wie folgt eine aufsteigende Kette von endlich erzeugten Idealen: Wähle $x_0 \in I$ beliebig und setze $I_0 = (x_0)$ (hiermit ist das von x_0 erzeugte Ideal gemeint). Da x_0 das Ideal I nicht erzeugt, gilt $I_0 \subsetneq I$. Sei $x_1 \in I \setminus I_0$. Setze $I_1 := (x_0, x_1)$.
Induktiv: Ist $I_k = (x_0, \ldots, x_k) \subseteq I$ definiert, so gilt $I_k \subsetneq I$, da I nicht endlich erzeugt ist. Wähle $x_{k+1} \in I \setminus I_k$ und definiere $I_{k+1} = (x_0, \ldots, x_k, x_{k+1})$.
Nach Konstruktion ist $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Kette von Idealen. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $x_{k+1} \in I_{k+1} \setminus I_k$ und die Kette ist echt aufsteigend, d.h. es gibt kein $k \in \mathbb{N}$ mit $I_k = I_{k+1}$.

Aufgabe 8.4
Sei A ein kommutativer Ring und $I \trianglelefteq A$ ein Ideal. Zeige die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

i) A ist noethersch.

ii) Jedes Ideal $J \trianglelefteq A$ mit $J \subseteq I$ ist endlich erzeugt und A/I ist noethersch.

Lösung:

i) $\Rightarrow$ *ii)* Sei A noethersch. Dann ist jedes Ideal in A endlich erzeugt, insbesondere auch jedes Ideal $J \trianglelefteq A$ mit $J \subseteq I$. Weiter ist A/I nach Lemma 7 in Kapitel 3 der Vorlesung noethersch.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Sei $K \trianglelefteq A$ ein beliebiges Ideal. Zu zeigen: K ist endlich erzeugt.
Sei $\pi : A \to A/I, a \mapsto a+I$ die kanonische Projektion. Betrachte das Bild $\pi(K) \subseteq A/I$. Da π surjektiv ist, ist $\pi(K)$ ein Ideal in A/I.
Da A/I noethersch ist, ist $\pi(K)$ endlich erzeugt. Seien $x_1, \ldots, x_m \in K$ mit $\pi(K) = (x_1+I, \ldots, x_m+I)$. Weiter ist $I \cap K \subseteq I$ ein Ideal in A. Nach Voraussetzung ist $I \cap K$ endlich erzeugt, d.h. es gibt $y_1, \ldots, y_n \in I \cap K$ mit $I \cap K = (y_1, \ldots, y_n)$. Wir zeigen nun, dass K als Ideal von der endlichen Menge $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ erzeugt wird.
Sei $k \in K$ beliebig. Dann gilt $k+I = \pi(k) \in \pi(K)$. Da $x_1+I, \ldots, x_m+I$

das Ideal $\pi(K) \trianglelefteq A/I$ erzeugen, gibt es $a_1, \ldots, a_m \in A$ mit

$$\begin{aligned} k + I &= (a_1 + I) \cdot (x_1 + I) + \ldots + (a_m + I) \cdot (x_m + I) \\ &= (a_1 x_1 + \ldots a_m x_m) + I. \end{aligned}$$

Es gilt also $k - \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \in I$ und somit $k - \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \in I \cap K$. Da $y_1, \ldots, y_n$ das Ideal $I \cap K$ erzeugen, gibt es $b_1, \ldots, b_n \in A$ mit $k - \sum_{i=1}^{m} a_i x_i = \sum_{j=1}^{n} b_j y_j$.
Folglich gilt $k = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i + \sum_{j=1}^{n} b_j y_j$.
Da $k \in K$ beliebig war, gilt $K = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ und K ist endlich erzeugt. Somit ist A noethersch.

***-Aufgabe**
Sei A ein kommutativer Ring, $I \trianglelefteq A$ ein Ideal und $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Sei $I^{n\times n} \subseteq A^{n\times n}$ die Teilmenge der $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen in I. Zeige: $I^{n\times n}$ ist ein beidseitiges Ideal in $A^{n\times n}$ und es gilt $A^{n\times n}/I^{n\times n} \cong (A/I)^{n\times n}$.

Lösung: Da $I \trianglelefteq A$ ein Ideal ist, gilt $0 \in I$ und die 0-Matrix $0_n \in A^{n\times n}$ liegt in $I^{n\times n}$. Da die Addition von Matrizen eintragsweise definiert ist und I eine Untergruppe von $(A, +)$ ist, ist $I^{n\times n}$ eine Untergruppe von $(A^{n\times n}, +)$.
Seien weiter $b \in I^{n\times n}$ und $a \in A^{n\times n}$ beliebig. Dann gibt es $b_{ij} \in I, a_{ij} \in A$ mit $b = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, a = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Die Einträge von $a \cdot b$ haben die Form

$$(a \cdot b)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

Da I ein Ideal ist, gilt $a_{ij} \cdot b_{jk} \in I$ für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Weiter ist I unter Addition abgeschlossen und es folgt $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \in I$ für alle $i, k \in \{1, \ldots, n\}$.
Da alle Einträge der Matrix $a \cdot b$ in I liegen, gilt $a \cdot b \in I^{n\times n}$. Analog haben die Einträge von $b \cdot a$ die Form

$$(b \cdot a)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot a_{jk}$$

und mit den gleichen Argumenten wie oben sehen wir, dass $b \cdot a \in I^{n\times n}$ gilt.
Insgesamt ist $I^{n\times n}$ ein beidseitiges Ideal in $A^{n\times n}$.
Betrachte die kanonische Projektion

$$\pi : A^{n\times n} \to (A/I)^{n\times n}, (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \mapsto (a_{ij} + I)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Offensichtlich ist π surjektiv und man sieht an der Definition der Addtition und Multiplikation von Matrizen leicht, dass π ein Ringhomomorphismus ist. Nach dem Homomorphiesatz für Ringe folgt damit $A^{n\times n}/\ker \pi \cong (A/I)^{n\times n}$. Der Kern von π besteht aber genau aus den Matrizen, bei denen alle Einträge in I liegen. Dies bedeutet $\ker \pi = I^{n\times n}$ und folglich $A^{n\times n}/I^{n\times n} \cong (A/I)^{n\times n}$.
Bemerkung: Da der Kern eines Ringhomomorphismus stets ein beidseitiges Ideal ist, gibt $\ker \pi = I^{n\times n}$ einen alternativen Beweis dafür, dass $I^{n\times n}$ ein beidseitiges Ideal in $A^{n\times n}$ ist.